

ROBERTO ROSSI ZUCCOLO

CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DAS  
ESTRUTURAS PROTENDIDAS  
EM REGIME PLÁSTICO

Tese apresentada á *Faculdade de  
Arquitetura da Universidade  
Mackenzie*, para o concurso  
da cadeira "*Sistemas Estruturais*."

SÃO PAULO

1959

ROBERTO ROSSI ZUCCOLO

CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DAS  
ESTRUTURAS PROTENDIDAS  
EM REGIME PLÁSTICO

Tese apresentada à *Faculdade de  
Arquitetura da Universidade  
Mackenzie*, para o concurso  
da cadeira "*Sistemas Estruturais.*"

SÃO PAULO

1959

## INTRODUÇÃO

*A generalização do emprêgo das estruturas protendidas, de alguns anos a esta parte, não sòmente em pontes e reservatórios, como no seu progressivo enquadramento na rotina da construção civil e, em particular, na sua harmoniosa integração no espirito arquetônico contemporâneo, impõe a necessidade de dispender-se maior atenção ao seu comportamento, projeto, cálculo e execução.*

*A orientação do estudo das formas estruturais, do ponto de vista de sua conceituação, objetivando o aperfeiçoamento daquela sensibilidade estática que, integrando a personalidade do Arquiteto — no próprio aspecto de sua sensibilidade artística — encontra na protensão o instrumento que permite a idealização da forma arquetônica de justas proporções e claras possibilidades construtivas.*

*Embora apenas 30 anos decorridos desde os primeiros sucessos de Freyssinet(\*) neste campo, e de acôrdo com suas próprias previsões, alcançam já as estruturas protendidas a sua maturidade.*

*Se para obras especiais, as condições de isostaticidade (ou baixa hiperestaticidade) permitem, mediante o emprêgo de mecanismo de apóio, obter soluções de comportamento próximo àquele das hipóteses de cálculo, para as estruturas de edifícios — com condições as mais variadas — a solução oferecida pelos métodos plásticos proporciona uma expressiva redução de trabalho material de cálculo, e permite uma visão englobada da importante condição limite de ruína.*

*Procuramos, neste trabalho, abrangendo estruturas de aço e concreto, protendidas, estabelecer uma orientação paralela à já consagrada para as estruturas metálicas.*

*Não se cogitou, absolutamente, do problema de coeficientes de segurança a serem empregados, ou de sua discussão: tivemos em mira, tão sòmente, um estudo sumário das condições de ruptura na flexão. Pretendemos, em trabalhos posteriores, analisar as condições limites para o cisalhamento, torção e outros esforços, isoladamente ou combinados.*

(\*) Data de 1929 a primeira edição de "Une révolution dans les techniques du béton" de Freyssinet  
(45) primeiro marco efetivo do emprêgo da protensão, com absoluto sucesso.

## P R E L I M I N A R E S

O objetivo do presente trabalho é o estudo do comportamento plástico das estruturas protendidas (\*).

O estudo das estruturas em regime plástico é bem antigo, remontando, pelo menos, a Galileu <sup>(1)</sup> (1638) e a Euler <sup>(2)</sup>. Neste particular, Van den Broeck, dando como referência o trabalho de Euler, diz: "NOTE THAT NO SYMBOL FOR STRESS APPEAR IN THE EULER EQUATION. IT IS STRICTLY A LIMIT-DESIGN FORMULA". <sup>(3)</sup> (o grifo é nosso).

Difícil seria um escôrço histórico, rigoroso, da teoria plástica das estruturas e nem este é o nosso objetivo. Entretanto, para melhor fixação de idéias, examinaremos o seguinte:

Em 1914, G. v. Kazinczi <sup>(4)</sup>, sugere o aparecimento de rótulas plásticas em vigas contínuas de aço, próximo a ruptura, e propõe o cálculo da viga bi-engastada com carga uniformemente distribuída, pelo diagrama plástico abaixo (fig. 1).

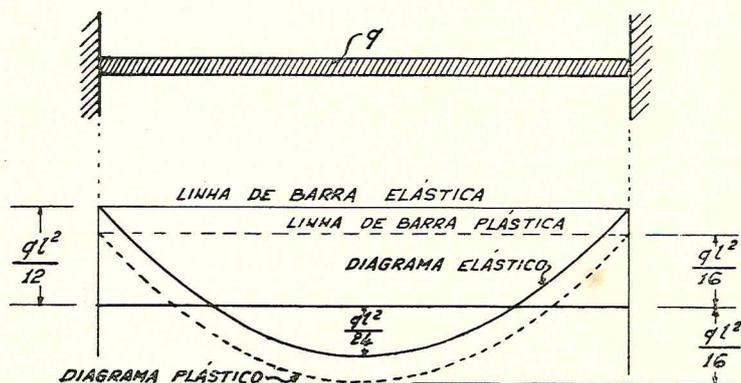


FIG. 1

(\*) Entendemos por estruturas protendidas aquelas nas quais é criado um estado preventivo de coação elástica ou plástica, ou seja, um estado arbitrário de tensões, bem definido, de sentido oposto aquêle que será induzido pelas forças externas às quais a peça estará sujeita.

onde, como se vê, teríamos momentos iguais a  $\frac{q.l^2}{16}$  no meio do vão e nos apoios.

Posteriormente, J. F. Baker (6) desenvolveu, baseado nas observações de Maier-Leibnitz (5), um método de cálculo de rótulas plásticas para estruturas contínuas. Relewa notar que, durante a II Guerra Mundial, o processo de Baker foi utilizado, com êxito, em numerosos projetos.

Ainda J. F. Baker e sua equipe de Cambridge deram-nos uma série de trabalhos esplêndidos, no mesmo sentido.

Van den Broek (3) advogou, a partir de 1948, nos Estados Unidos, o regime plástico.

A partir daí, para os nossos dias, no que concerne às estruturas de aço, o progresso tem sido contínuo. Desta fase, destacamos:

- Os teoremas de Greemberg e Praeger (7)
- Método de Cálculo de carga de ruptura para estruturas apor-ticadas: Neal e Symonds (8);
- Método da distribuição de momentos pela teoria plástica: Horne (9);
- Método elasto-plástico para vigas e porticos: Sawyer (10);
- Estudo analítico-experimental para arcos de aço: Stevens (11).

Isto no que diz respeito às estruturas de aço.

No concreto armado, também, a idéia data de 1920, quando as instruções alemãs permitem a fixação da linha de barra, do diagrama de momentos fletores, de maneira arbitrária, nas vigas bi-engastadas.

Em 1930, Emperger (12) recomenda a fixação arbitrária da linha de barra.

Em 1933, Kazinczi (13), que já concebera rótulas plásticas para o aço, dava à publicidade os resultados de inúmeros ensaios em vigas de dois vãos, com armaduras incorretamente (de acôrdo com a teoria da elasticidade) dispostas; algumas reforçadas nos vãos e outras, nos apoios. Observou, então, que tôdas as vigas — invariavelmente — só atingiam a ruptura quando o carregamento proporcionava valores de total plastificação de apoios e vãos, simultaneamente. Observação importante é a de que tôdas as peças examinadas eram sub-armadas. Glanville e Thomas, (45) em 1935, utilizam peças para ensaios, onde as secções críticas eram, ora sub, ora super-armadas.

A A. L. L. Baker, é à sua equipe do Imperial College se devem, provavelmente, os mais importantes trabalhos e conclusões. Com efeito, desde 1949, quando apareceu no Magazine of Concrete Research (14), seu método de tentativas para cálculo da redistribuição de momentos, temos tido, até a presente data, uma exaustiva sucessão de trabalhos, cujo ritmo não tem tido solução de continuidade (15), (16), (17), (18), (19), (20).

Destaque-se, ainda, os métodos de cálculo de lajes segundo as linhas de ruptura, conforme Johansen(41), Chamecki(46) e Guzman(47).

— Limitaremos esta parte do nosso estudo, exclusivamente, às estruturas fletidas, com protensão de compressão.

— Antes de analisarmos o comportamento plástico das estruturas de aço ou concreto com protensão, faremos uma rápida análise dos princípios de plasticidade, aplicados às secções e estruturas correntes de aço e concreto armado e, subsequentemente, a extensão destes princípios às estruturas protendidas com as respectivas peculiaridades.

## PRIMEIRA PARTE

### 1. PLASTIFICAÇÃO TOTAL DA SECÇÃO

#### 1.1 — Peças em aço doce

##### 1.1.1 — Generalidades

Analizaremos, preliminarmente, o desenvolvimento de deformações e tensões numa secção de peça fletida, em aço doce, e a seqüência entre a fase elástica inicial e a fase plástica final.

Os termos adotados, a seguir têm aqui o seguinte significado:

**Plastificação:** é a penetração gradual da tensão de escoamento (ou ruptura convencional), da fibra externa para o interior da secção, sob esforço fletor crescente. A plastificação total ocorre quando age sobre a secção um momento de plastificação.

**Momento de plastificação** é o máximo momento que uma secção pode suportar.

##### 1.1.2 — Peças sujeitas a flexão simples

É conhecido o diagrama convencional tensão-deformação do aço doce (fig. 2): o trecho OA corresponde à fase elástica (tensões linearmente proporcionais às deformações); AB, à fase plástica (fase de escoamento), onde não mais se verifica a proporcionalidade entre tensões e deformações: — praticamente, sem acréscimos de cargas, a peça prossegue deformando.

Por outro lado será admitida a hipótese da conservação das secções planas, até a total plastificação.

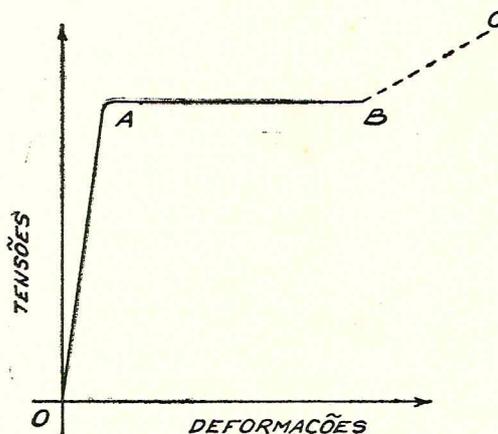


FIG. 2

Numa primeira fase (elástica), as tensões serão proporcionais às deformações, e o diagrama de tensões terá o aspecto da figura 3a, com os máximos  $\sigma_f$  ocorrendo nos bordos. — Crescendo o momento, as fibras extremas suportarão uma tensão de escoamento  $\sigma_e$ . Uma vez atingida a tensão  $\sigma_e$  na fibra extrema, esta prossegue deformando sem aumento de tensão; consequentemente, as fibras inferiores vão atingindo a tensão de escoamento  $\sigma_e$  (fig. 3c), até uma completa plastificação da secção (fig. 3d).

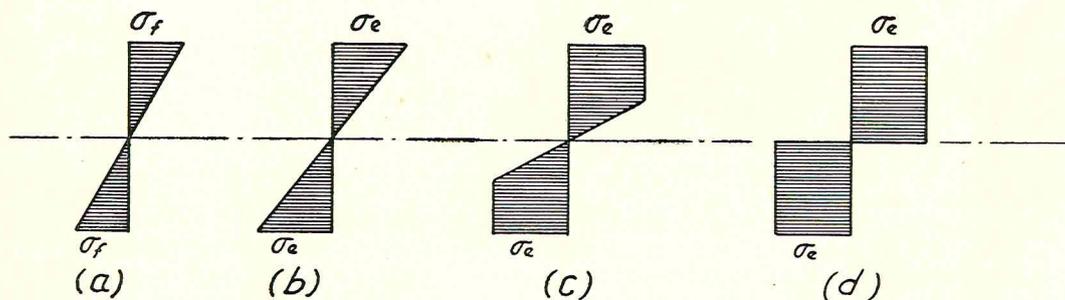


FIG. 3

Assim, p. ex., para uma secção retangular de largura  $b$  e altura  $d$ , o momento elástico resistente  $W_e = \frac{bd^2}{6}$ , o momento de início de plastificação (ou momento elástico limite) será:  $M = \frac{b \cdot d^2}{6} \cdot \sigma_e$  para esta mesma secção retangular, a parte acima da linha AA (fig. 4) será plastificada em compressão, e aquela abaixo, em tração. Do princípio de equilíbrio resulta:

$$C = -T = \sigma_e \cdot \frac{bd}{2}$$

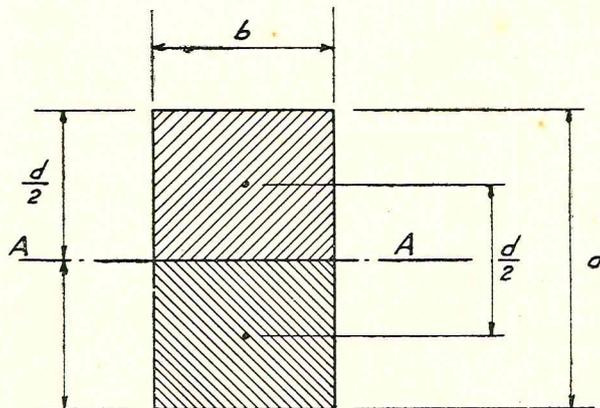


FIG. 4

e o braço de alavanca plástico será  $d/2$ , donde:

$$M_{plast.} = \sigma_e \cdot \frac{bd^2}{4}$$

O termo  $\frac{bd^2}{4}$ , m̀eramente geométrico, será o momento resistente plástico da secção ( $W_p$ ).

A relação entre o momento de plastificação total e o momento elástico limite, será:

$$\frac{M_p}{M_e} = \frac{\sigma_e \cdot W_p}{\sigma_e \cdot W_e} = \frac{W_p}{W_e}$$

um quociente de relações geométricas e portanto, função da conformação da peça, sendo designado por **fator de forma da secção** e, mediante o qual, pode-se calcular o acréscimo de carga que a viga comportará, uma vez atingida na fibra extrema a tensão de escoamento, isto é, o limite de elasticidade; ou, em outros termos, o acréscimo de carga para o qual a secção ainda prossiga absorvendo momento. — Consideremos, por exemplo, uma viga simplesmente apoiada em A e B (fig. 5), sujeita a carga uniformemente distribuída.

O momento limite elástico será atingido quando se verificar  $q = q_e$ , de modo que  $\frac{q_e \cdot l^2}{8} = W_e \cdot \sigma_e$ , e o momento limite de plastificação  $M_p$ , quando

$$q = q_p; \text{ isto é, para a condição em que: } \frac{q_p \cdot l^2}{8} = \sigma_e \cdot W_p$$

Donde:

$$\frac{q_p}{q_e} = \frac{W_p}{W_e} = f_f$$

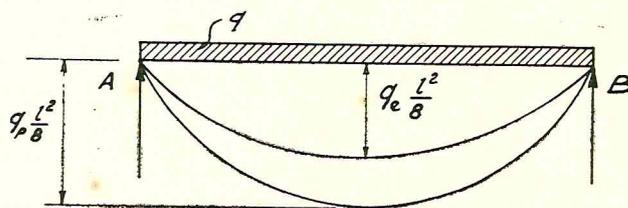


FIG. 5

Uma vez atingido o limite elástico  $M_e$ , poderemos acrescer a carga de um valor  $\Delta q = (q_p - q_e)$ , onde  $q_p = f_f \cdot q_e$ , ou seja:  $\Delta q = (f_f - 1) \cdot q_e$  para que a estrutura ainda resista.

Veremos a seguir que se a estrutura não fôr, inicialmente, isostática, a plastificação de uma secção não implica na ruína da estrutura.

A plastificação de uma secção equivale à formação, na secção, de uma rótula plástica, isto é, uma secção que é capaz de rotação como se fôsse uma barra articulada onde, todavia, o momento de plastificação é mantido; destarte

evidencia-se, na estrutura isostática, a formação de um mecanismo, tornando a estrutura inestável, o que equivaleria, praticamente, à ruína.

Por outro lado, admitamos um vínculo inicial à barra, seja uma extremidade engastada. Se a peça tiver secção constante, o momento máximo ocorrerá

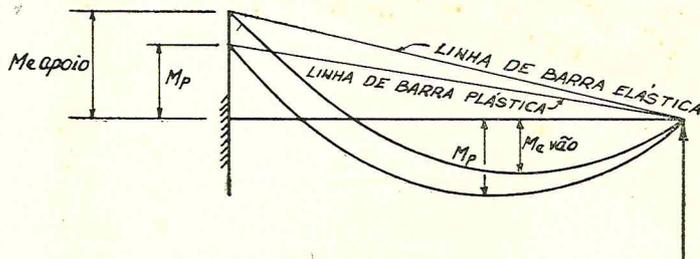


FIG. 6

na fase elástica, na secção do apoio. Aí, a fibra extrema da secção atingirá, primeiramente, a tensão de escoamento  $\sigma_e$ ; prosseguindo-se no carregamento, na secção mais solicitada do vão (região dos momentos positivos), também a fibra extrema atingirá a tensão  $\sigma_e$ ; logo após, a secção do apoio estará completamente plastificada, dando lugar à formação de uma rótula plástica; a estrutura, não obstante, permanece estável pois o sistema resultante é o de uma viga sobre dois apoios, com momento (momento de plastificação do apoio) aplicado no extremo. À continuação, prosseguindo crescendo o carregamento, ocorreria o momento de plastificação na secção mais solicitada do vão, o que implicaria na formação de um mecanismo e, conseqüentemente, ruína da estrutura. Observe-se, além do mais, que as secções sendo iguais (vão e apoio), a plastificação para ambas é atingida para um mesmo valor de momento, conforme indica a figura.

1.1.3 — Peças fletidas com carga axial "N" constante. (flexão composta com carga axial constante).

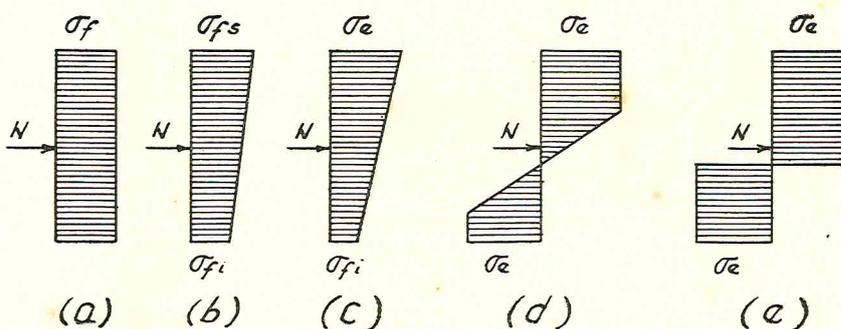


FIG. 7

Na fase elástica, com  $M = 0$ , teremos tensões devidas exclusivamente a "N". Sendo "S" a área da secção transversal, teremos  $\sigma_{fN} = \frac{N}{S}$  (fig. 7a.).

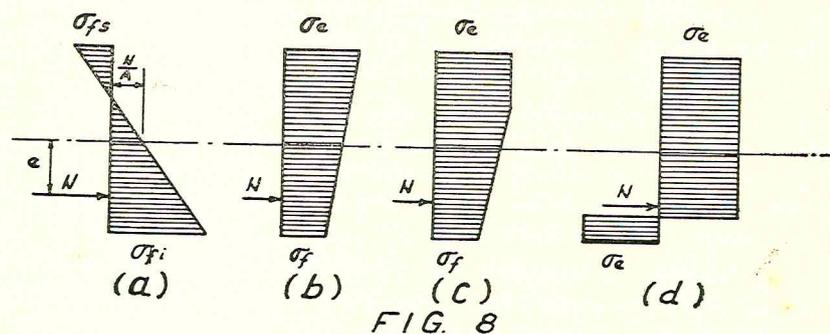
Com o aparecimento do momento fletor, despertam-se tensões  $\sigma_{fM(s)}$  e  $\sigma_{fM(i)}$  nos bordos superior e inferior, a êle devidas, e que irão se superpor às  $\sigma_{fN}$  resultando tensões  $\sigma_{fs}$  e  $\sigma_{fi}$ , que irão crescendo proporcionalmente ao momento (fig.

7b). Quando a fibra superior (fibra mais solicitada na fase elástica) atingir a tensão  $\sigma_e$  (fig. 7c) dar-se-á início à plastificação. Com o crescer do momento aplicado, para um certo valor de  $M$ , também a fibra inferior terá atingido a tensão de escoamento (fig. 7d). Finalmente, em seqüência, atingir-se-á à plastificação total da secção (fig. 7e).

É evidente, pelo princípio de equilíbrio de forças, que a área plastificada em compressão será maior do que a de tração:

$$\text{Area plastificada em compressão} - \frac{N}{\sigma_e} = \text{Area plastificada em tração.}$$

#### 1.1.4 — Peças fletidas com carga excêntrica "N", constante (flexão composta com carga excêntrica).



Na fase elástica, com  $M_{ext.} = 0$ , devido à excentricidade, teremos o diagrama da figura 8a. Pela atuação do momento crescente, a fase elástica atinge o seu limite (fig. 8b), quando a fibra superior atinge a tensão de escoamento  $\sigma_e$ , iniciando-se a plastificação, que ficará completa quando, em todos os pontos, fôr atingida a tensão de escoamento (fig. 8d).

Consideremos a secção da figura 9, onde  $N$  é o traço da linha de ação da carga  $N$ , de excentricidade  $e$ . Devido a carga  $N$ , (fig. 9) despertar-se-ão tensões:

$$\sigma_{N(s)} = \frac{N}{S} - \frac{N \cdot e}{W_s} = \frac{N}{S} \left( 1 - \frac{e}{i^2/v_s} \right)$$

$$\sigma_{N(i)} = \frac{N}{S} + \frac{N \cdot e}{W_i} = \frac{N}{S} \left( 1 + \frac{e}{i^2/v_i} \right)$$

Em virtude do momento exterior  $M$ ;

$$\sigma_{M(s)} = \frac{M}{W_s} = \frac{M}{S \cdot i^2/v_s}$$

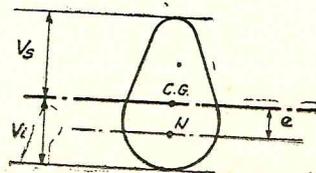


FIG. 9

No domínio elástico, o princípio de superposição permite escrever:

$$\begin{aligned}\sigma_s &= \sigma_{N(s)} + \sigma_{M(s)} = \frac{N}{S} \left( 1 - \frac{e}{i^2/v_s} \right) + \frac{M}{S \cdot i^2/v_s} = \\ &= \frac{1}{S} \left[ N \left( 1 - \frac{e}{i^2/v_s} \right) + \frac{M}{i^2/v_s} \right] \\ \sigma_i &= \frac{N}{S} \left( 1 + \frac{e}{i^2/v_i} \right) - \frac{M}{S \cdot i^2/v_i} = \frac{1}{S} \left[ N \left( 1 + \frac{e}{i^2/v_i} \right) - \frac{M}{i^2/v_i} \right]\end{aligned}$$

As expressões são válidas até:  $\sigma_s = \sigma_e$ . Uma vez atingida, na fibra superior a tensão  $\sigma_e$ , teremos uma fase elasto-plástica, que em virtude do carregamento crescente, permite atingir sucessivamente a tensão de escoamento na fibra inferior, e posteriormente a completa plastificação da secção.

Vale observar que, embora os valores das áreas plastificadas, — respectivamente a tração e compressão — sejam iguais no caso de carga  $N$  axial ou excêntrica, o valor que corresponde ao momento exterior de plastificação é diferente, eis que, para o equilíbrio de momentos no caso da carga excêntrica, dispõe-se de um momento inicial de reserva.

Mistér se faz, no entretanto, estabelecerem-se expressões genéricas, aplicáveis a uma secção qualquer (simétrica apenas em relação ao plano de aplicação da carga e do momento, chamaríamos plano vertical) porque, somente nas secções simétricas (duplamente) o baricentro elástico situa-se na linha de separação das duas zonas plastificadas em flexão simples.

Assim, o caso de carga axial tem um sentido objetivo apenas quando se tratar de secção simétrica, ou no comportamento elástico. Numa secção qualquer (fig. 10), a carga  $N$  atuando na posição indicada, sendo  $z$  o afastamento entre os centros de gravidade das áreas, respectivamente de tração e compressão  $z_n$  o afastamento do ponto de aplicação da carga ao centro de gravidade da área de compressão, as expressões gerais de equilíbrio fornecem:

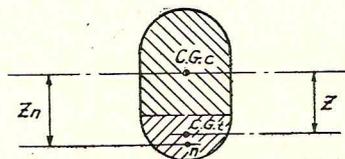


FIG. 10

$$\text{Area plastificada comprimida} - \frac{N}{\sigma_f} = \text{Area plastificada tracionada.}$$

$$S_c - \frac{N}{\sigma_f} = S_t$$

$$S_c \cdot \sigma_e = S_t \cdot \sigma_e + N \quad (1)$$

$$S_t \cdot \sigma_e \cdot z + N \cdot z_n = M_{\text{plast.}}$$

Chamando de  $S$  a área total:

$$\begin{cases} S = S_c + S_t \\ \frac{N}{\sigma_e} = S_c - S_t \end{cases}$$

Donde:

$$S + \frac{N}{\sigma_e} = 2 S_c \dots S_c = \frac{1}{2} \left( S + \frac{N}{\sigma_e} \right) \text{ e } S_t = \frac{1}{2} \left( S - \frac{N}{\sigma_e} \right)$$

Genêricamente, então, determinam-se os valores de  $S_c$  e  $S_t$ , e, com a determinação dos centros de gravidade dessas áreas plastificadas podemos, de imediato, deduzir o valor do momento de plastificação.

No caso particular da secção simétrica, com carga no baricentro, teremos (fig. 11):

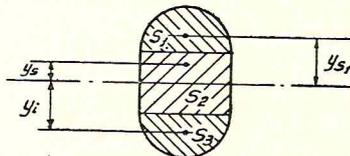


FIG. 11

$$S_c = S_1 + S_2 \left( \text{onde } S_2 = \frac{N}{\sigma_e} \right)$$

$$S_t = S_3 = S_c - \frac{N}{\sigma_e} = S_c - S_2 = S_1$$

O baricentro da área comprimida estará em  $y_s = \frac{S_1 \cdot y_{s1}}{S_1 + S_2}$  e o da área traída em  $y_i$ .

Donde:

$$\begin{aligned} M_{\text{plast.}} &= S_3 \cdot \sigma_e (y_s + y_i) + N \cdot y_s = \\ &= S_3 \cdot \sigma_e \left( \frac{S_1 \cdot y_{s1}}{S_1 + S_2} + y_i \right) + N \cdot \frac{S_1 \cdot y_{s1}}{S_1 + S_2} = \\ &= \frac{S_3 \cdot \sigma_e \cdot S_1 \cdot y_{s1} + S_3 \cdot \sigma_e \cdot S_1 \cdot y_i + S_3 \cdot \sigma_e \cdot S_2 \cdot y_i + y_{s1} \cdot S_2 \cdot \sigma_e \cdot S_1}{S_1 + S_2} = \\ &= \frac{y_{s1} \cdot S_1 \cdot \sigma_e (S_3 + S_2) + y_i \cdot S_3 \cdot \sigma_e (S_1 + S_2)}{S_1 + S_2} \end{aligned}$$

Sendo  $S_3 = S_1$ , segue:

$$M_{\text{plast.}} = y_1 S_1 \cdot \sigma_e + y_i \cdot S_1 \cdot \sigma_e = S_1 \cdot \sigma_e (y_{s1} + y_i),$$

isto é, a expressão geral do momento de plastificação total, para o caso da secção simétrica, com carga axial.

Para o caso da secção simétrica porém, com carga excêntrica de  $e$  (fig. 12), ter-se-á:

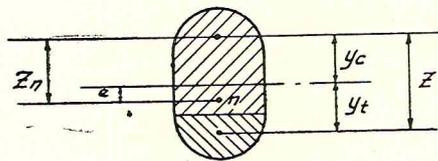


FIG. 12

$$S_c - \frac{N}{\sigma_e} = S_t$$

$$S_c + S_t = S, \text{ con } S_c = \frac{1}{2} (S + N \cdot z_n) = S_t \cdot \sigma_e (y_c + y_t) + N (y_c + e)$$

$$M_{\text{plast.}} = TZ + N \cdot z_n = S_t \cdot \sigma_e \cdot Z + N \cdot z_n = S_t \cdot \sigma_e (y_c + y_t) + N (y_c + e)$$

Sendo:

$$y_c = \frac{S_1 \cdot y_t}{S_1 + S_2}$$

$$M_{\text{plast.}} = S_1 \cdot \sigma_e \left( \frac{S_1 \cdot y_t}{S_1 + S_2} + y_t \right) + N \cdot \frac{S_1 \cdot y_t}{S_1 + S_2} + N e =$$

$$= \frac{2 \sigma_e y_t \cdot S_1}{S_1 + S_2} (S_1 + S_2) + N \cdot e = 2 \sigma_e \cdot S_1 y_t + N e$$

Sendo o valor  $2\sigma_e \cdot S_1 y_t$  o momento de plastificação da secção, com carga  $N$  axial, conclue-se que, a diferença para o caso de  $N$  excêntrica resume-se, unicamente, ao momento de reserva  $N \cdot e$  ou seja, o resultante da transferência da carga ao centro de gravidade da secção.

Pode-se, por outro lado, demonstrar que, no caso de uma secção assimétrica, a carga  $N$  agindo a uma distancia  $e'$  (do centro de gravidade da área plastificada da carga transferida), o momento de plastificação total será obtido adicionando-se, ao momento de plastificação da secção complementar, o momento de transferência  $N \cdot e'$ .

Pela observação da figura 13:

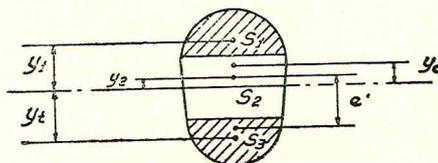


FIG. 13

da secção

(fig. 12),

$$M_{\text{plast.}} = S_3 \sigma_e (y_t + y_1) + N (e' - y_2 + y_1) - S_2 \sigma_e (y_1 - y_2)$$

$$S_3 = S_1 \quad \text{e} \quad N = S_2 \sigma_e.$$

Ou, em expressão mais simples:

$$M_{\text{plast.}} = \sigma_e S_1 (y_1 + y_t) + N \cdot e'$$

Em resumo, a marcha de cálculo para o caso de uma secção qualquer (com no mínimo um eixo de simetria — traço do plano de momento com a secção —) sob a ação da carga excêntrica  $N$ , e do momento exterior, é a seguinte:

a) Calcula-se a área necessária de plastificação para a carga  $N$ :

$$S_2 = \frac{N}{\sigma_e};$$

b) Da área total  $S$ , obtém-se:

$$S_1 = S_3 = \frac{S - S_2}{2}.$$

c) A partir dos extremos da secção marcam-se as linhas 1-1 e 3-3 determinantes das áreas  $S_1$  e  $S_3$ . (fig. 14).

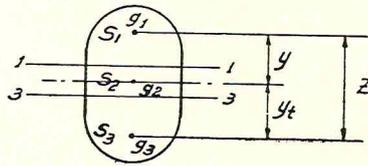


FIG. 14.

d) Determinam-se os baricentros  $g_s$  e  $g_i$  e seu afastamento  $z = y_1 + y_t$ ;

e) Na área  $S_2$  compreendida entre 1-1 e 3-3 determinam-se o baricentro  $g_2$ , e seu afastamento  $e'$  da carga  $N$ ;

f) Calcula-se finalmente o momento de plastificação total:

$$M_{\text{plast.}} = S_1 \cdot \sigma_e \cdot z + N \cdot e$$

## 1.2 — PEÇAS EM CONCRETO ARMADO

### 1.2.1 — Generalidades

Apresentando o concreto boa resistência a compressão porém baixa resistência a tração, seu comportamento — é obvio — é bastante diverso daquele do aço. Impõe-se, evidentemente, desde logo, apreciar êste material sob novos ângulos, extendendo-lhe os conhecimentos sôbre o aço no que lhe seja pertinente, restringindo ou alargando conceitos, enfim, criando uma técnica especial de investigação adequada.

Nesta ordem de considerações resulta, de início, a necessidade de definição de uma terminologia adequada. Esclarecemos a seguir, o significado que emprestamos a alguns conceitos, restringindo-nos, todavia, àqueles que, eventualmente, possam facilitar a compreensão da nossa exposição subsequente:

- 1) *Carga limite* é a carga necessária para produzir um número tal de rótulas plásticas, que a estrutura possa ser considerada — no todo ou em parte — como um mecanismo;
- 2) *Mecanismo* é um sistema estrutural articulado mediante rótulas — plásticas ou reais — capaz de, sob a ação de acréscimos insignificantes de carga, deformar-se a ponto de comprometer a própria estabilidade;
- 3) *Momento de ruptura* ou *momento de plastificação total* é o máximo momento fletor que uma secção pode suportar. — É o momento, a partir do qual a secção se comporta como uma rótula plástica.

Além das condições requeridas para as estruturas em aço, a saber:

- a) *Condição de equilíbrio* (Esforços internos e externos devem se equilibrar);
- b) *Condição de Mecanismo de Colapso* (Um número suficiente de rótulas plásticas devem se formar para criar um mecanismo);
- c) *Condição de escoamento* O momento de plastificação não será excedido em nenhum ponto da estrutura.

Para o concreto, onde elas são necessárias mas não suficientes, outras devem ser satisfeitas, dentre as quais as mais importantes são:

- d) **Capacidade de rotação.** — Nas estruturas de aço, os vários métodos de cálculo fundamentam-se na condição de mecanismo de colapso. Pouca atenção se dá à maneira de como as rótulas exigem a deformação da secção, antes da formação das demais. Tais considerações, de resto, não são, usualmente, necessárias — em relação ao aço — porque em circunstâncias normais, a deformação limite do aço doce é maior que 15%, excedendo assim, a deformação mínima requerida pela distribuição de momentos em qualquer secção.

Tendo em conta, por outro lado, que a deformação limite para o concreto em compressão é de 0,3 a 0,5%; que, fundamentalmente, em função da ordem de grandeza da armadura, a deformação limite em tração para o aço varia de menos de 0,5% a mais de 2,0%; — é evidente que, no cálculo limite das estruturas de concreto, a capacidade de

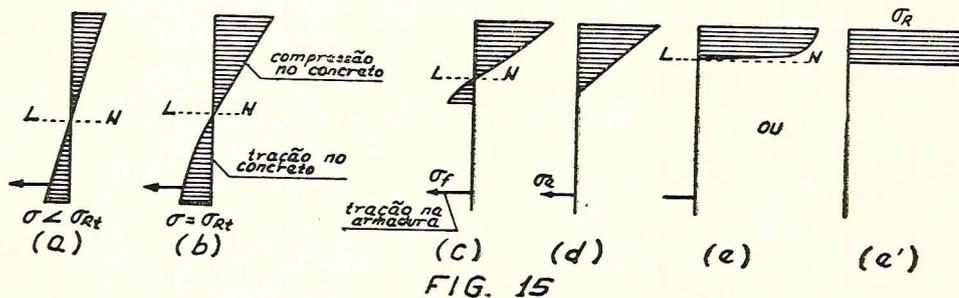
rotação das secções deve ser considerada com maiores precauções. Além disso, para evitar excessivo fissuramento, oriundo da flexão, é necessário limitar a rotação das rótulas, inclusive no caso em que considerável capacidade é obtida, após intenso fissuramento;

- e) **Resistência à distribuição dos momentos.** — A menos do emprêgo de mesas ou secções de altura variável, a resistência para momentos positivos ou negativos de um elemento estrutural de aço é constante ao longo do mesmo. Esta a razão da economia ponderável do projeto estrutural em aço no regime plástico, sobre o regime elástico. Por outro lado, a análise estrutural inelástica deve assegurar que as três condições já citadas sejam satisfeitas.

Para as estruturas em concreto, fazendo-se variar a quantidade e localização da armadura, facilmente se obtêm diferentes resistências a momentos positivos e negativos ao longo da peça. — É possível, portanto, armar convenientemente a estrutura de concreto de tal forma que a distribuição de momentos devida à carga limite seja razoavelmente próxima à distribuição correspondente ao comportamento elástico. Todas as rótulas plásticas necessárias para formar um mecanismo terão lugar com a mesma carga e, portanto, teremos rotações plásticas diminutas. Semelhantemente, é possível localizar-se, arbitrariamente, as rótulas e os momentos plásticos para a formação do mecanismo, de modo a satisfazer a condição de equilíbrio. A condição de escoamento pode ser satisfeita pelo dimensionamento da armadura de maneira a evitar o escoamento entre as rótulas escolhidas.

**1.2.2 — Peças sujeitas a flexão simples.** — Analisemos, de modo sumário, a secção de concreto sujeita a flexão, sob a ação do esforço crescente.

Para pequenas cargas, a tensão limite  $\sigma_{rt}$ , de tração, ainda não foi atingida. (fig. 15a) — Temos o estadio Ia.



Atingida a tensão  $\sigma_{rt}$  na fibra extrema inferior, suceder-se-á uma plastificação da área tracionada (fig. 15b — Est. Ib) que, a um determinado instante rompe, fissurando; as forças de tração passam nesta ocasião, a serem resistidas apenas pela armadura (fig. 15c, onde a área hachuriada é desprezível) — Est. II.

Crescendo a carga, atingido, em certo instante  $\sigma_f = \sigma_e$ , quando aumentando rapidamente as deformações, a linha neutra sobe, reduzindo a área comprimida e, conseqüentemente, fazendo a fibra superior atingir  $\sigma_r$ . (fig. 15d).

Finalmente, a tensão  $\sigma_r$  é atingida nas fibras vizinhas à extrema e, assim, sucessivamente, até que toda a área esteja plastificada (fig. 15e ou e' — plastificação convencional).

Não discutiremos aqui, a conformação do diagrama de plastificação; vamos admitir por hipótese, o diagrama da figura 16.

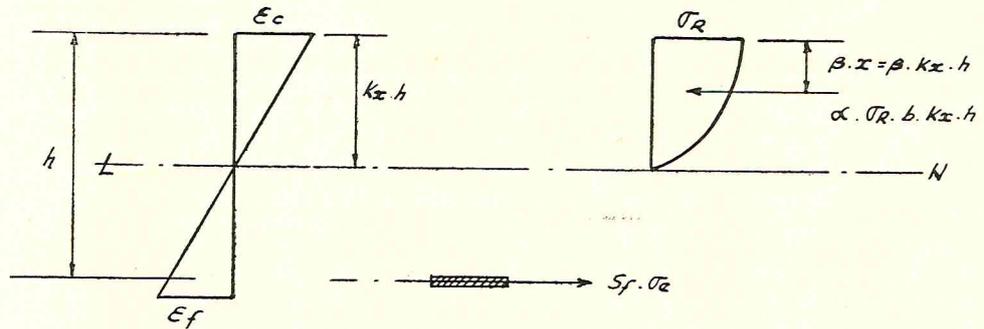


FIG. 16

O momento de plastificação será:

$$M_{\text{plastif.}} = \alpha \cdot \sigma_R \cdot b \cdot K_x \cdot h (h - \beta \cdot x)$$

Ou com:

$$\beta x = \beta \cdot K_x \cdot h$$

$$M_{\text{plastif.}} = \alpha \cdot \sigma_R \cdot b \cdot K_x \cdot h^2 (1 - \beta \cdot K_x) = \sigma_R \cdot b h^2 \cdot K_{III}$$

O coeficiente

$$K_{III} = \alpha \cdot k_x (1 - \beta \cdot k_x)$$

Para a plastificação suposta uniforme (diagrama retangular),  $\beta = 0,5$  e  $\alpha = 1$  e

$$M_{\text{plastif.}} = k_x \cdot \sigma_R \cdot b h^2 (1 - k_x)$$

Se a peça é sub-armada, tem-se:

$$M_{\text{plast.}} = S_f \cdot \sigma_e (h - \beta k_x \cdot h) = S_f \cdot \sigma_e \cdot h (1 - \beta \cdot k_x) \dots$$

$$k_x = \frac{S_f \cdot \sigma_e}{\alpha \cdot \sigma_R \cdot b \cdot h}$$

e, com

$$\frac{S_f}{bh} = \mu, \quad k_x = \frac{\mu}{\alpha} \cdot \frac{\sigma_e}{\sigma_R}$$

Quando a plastificação se completar sem o escoamento da armadura (peças super-armadas, o valor de  $k_x$  será relacionado com o encurtamento de ruptura do concreto e o alongamento do aço no instante da ruptura:

$$K_x = \frac{\epsilon'_c}{\epsilon'_c + \epsilon'_f}$$

da qual obtemos o valor de  $x$ , e conseqüentemente, o momento de ruptura.

### 1.2.3 — Peças sujeitas a flexão composta com carga constante "N", aplicada no centro da seção.

Analizemos os diagramas representados na figura 17.

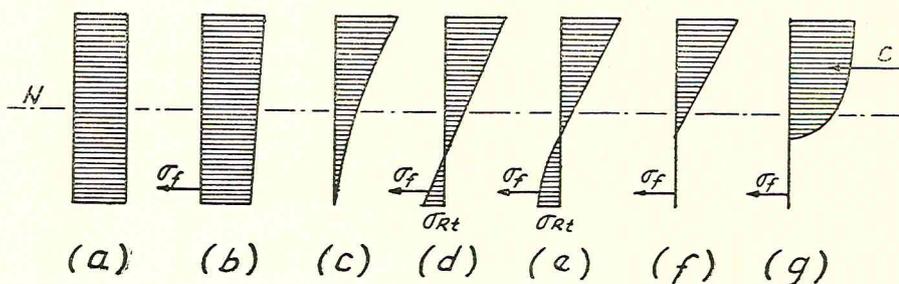


FIG. 17

Sem a presença do momento fletor, o diagrama será trapezoidal, devido à existência de armadura inferior (fig. 17b). Com o aparecimento e gradativa predominância do momento fletor as características irão se aproximando da flexão simples.

Ressaltando que o problema ora focalizado será, sempre, o de ruptura com predominância de flexão, isto é, grande excentricidade, analisemos a figura 18

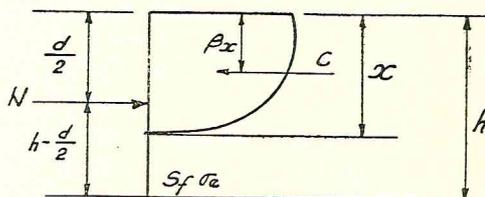


FIG. 18

$$C = N + S_f \cdot \sigma_e \quad (1)$$

$$C = \alpha \cdot x \cdot b \cdot \sigma_R$$

$$\alpha \cdot x \cdot b \cdot \sigma_R = N + S_f \cdot \sigma_e$$

O momento de plastificação total da seção será:

$$M_R = C \left( h - \beta \cdot x \right) - N \left( h - \frac{d}{2} \right) = \alpha \cdot x \cdot b \cdot \sigma_R \left( h - \beta \cdot x \right) -$$

$$+ N \left( h - \frac{d}{2} \right)$$

ou, levando em conta (1):

$$M_R = \left( N + S_f \cdot \sigma_e \right) \left( h - \beta \cdot x \right) - N \left( h - \frac{d}{2} \right) =$$

$$= S_f \cdot \sigma_e \cdot h - \left( N + S_f \cdot \sigma_e \right) \beta \cdot x + \frac{N \cdot d}{2}$$

**1.2.4 — Flexão composta com carga N, constante, excêntrica.** — Este caso em pouco difere do anterior já que, como se viu, a condição axial não influe no estabelecimento de  $M_R$ .

Resta-nos apreciar, pois, o caso que mais de perto nos interessa, qual seja, o da carga N atuando no centro de gravidade da armadura tracionada (fig. 19). O momento de ruptura será dado por:

$$M_R = (N + \sigma_e \cdot S_f) (h - \beta \cdot x)$$

Observa-se aqui uma majoração do momento  $M_R$ , correspondente ao termo  $\left( h - \frac{d}{2} \right)$ , uma vez que a carga já age no centro de gravidade da armadura tracionada. Nota-se por outro lado, que a validade desta expressão se restringe ao campo das peças sub-armadas.

Para o caso das peças super-armadas, calculada a posição da L.N. e a tensão da armadura no instante da ruptura, o momento de ruptura seria calculado diretamente.

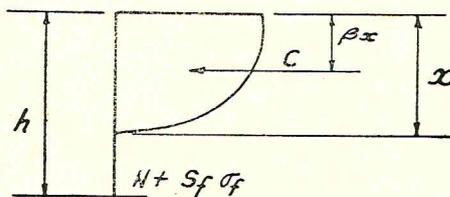


FIG. 19

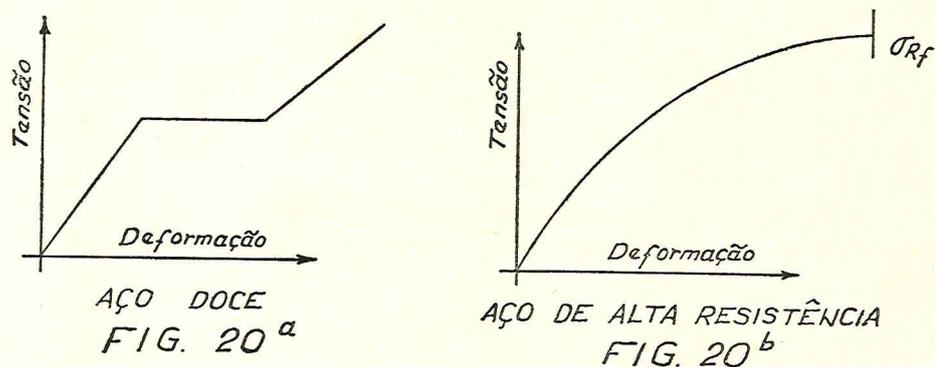
## 2. PLASTIFICAÇÃO DAS SECCÕES PROTENDIDAS

### 2.1. Peças em aço doce

#### 2.1.1. Generalidades

Quando a protensão fôr aplicada, constantemente, através macacos de compressão extrema, é evidente que a plastificação dar-se-á conforme 1.2, já estudada; todavia, o caso mais freqüente, de possível aplicação prática, é o da protensão por meio de cabos de aço de alta resistência.

Confrontemos, preliminarmente, os diagramas tensão-deformação em aço doce e nos aços de protensão (fig. 20 a e b).



Os aços de protensão apresentam apenas um limite convencional de elasticidade, não possuindo patamar de escoamento. Em face do que poderemos, em primeira aproximação, admiti-los como material elástico até a ruptura.

#### 2.1.2. Protensão excêntrica

Referindo a fig. 21 temos que, na fase elástica (a), da aplicação da protensão, já atua um momento fletor,  $M_0$ , inicial, devido ao peso próprio (eventualmente lastro ou carga permanente).

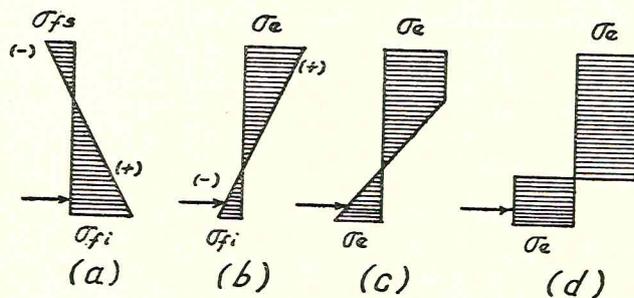


FIG. 21

Admitamos a protensão com cabo ancorado na extremidade: — se o cabo for paralelo ao bordo inferior, ao longo da peça (o qual não é o caso usual), durante a fase elástica teremos uma deformação total, igual, no cabo e na fibra igualmente afastada do eixo e paralela ao cabo de modo que, a uma variação de tensão na peça corresponderá, também uma variação na tensão no cabo — se o cabo fôr ancorado em posição diversa da anterior, isto é, apresentando certa curvatura, o alongamento do cabo será sensivelmente diferente e, conseqüentemente, diversa será a variação de tensão no cabo.

A fibra superior atinge a plastificação em primeiro lugar; dar-se-á, portanto, um deslocamento da linha neutra, de modo a permitir que as fibras intermediárias atinjam a plastificação. É bem de ver que os aumentos de tensão serão de molde a que, no instante da plastificação final se tenha:

$$S_f^* \cdot \sigma_e^* + S_{ft} \cdot \sigma_e = \sigma_e \cdot S_{fc}$$

No limite:  $S_f^* \cdot \sigma_e^* = \sigma_e \cdot S_{fc}$  e  $S_{ft} = 0$ , e tóda a secção será plastificada em compressão, o que corresponde ao caso limite para a flexão composta já estudado em 1.1.2. Tal caso, todavia, não é freqüente, eis que representa um consumo excessivo de aço de protensão,

$$S_f^* = S_f \cdot \frac{\sigma_e}{\sigma_e^*}, \text{ digamos } \frac{24}{150} \cong S_f \times 0,16$$

Não ultrapassado o limite de elasticidade ou, melhor dito, a capacidade de reversibilidade do aço de protensão — que é o que ocorre normalmente — existirá, sempre, a fôrça de compressão atuante.

É necessário esclarecer, com efeito, que em se tratando de fôrça de compressão ou efeito reativo do aço de protensão sôbre as ancoragens, as condições de plastificação serão as mesmas.

Assim, entrando o bordo inferior da viga em tração, e então também acrescentando a tensão no aço de protensão, teremos — na condição final de plastificação total — a mesma situação que teríamos se a protensão ainda existisse — claro está — devidamente corrigida dos valores de mudança de tensão.

Seja a fig: 22: analisemos a variação de tensões no cabo, ainda no regime elástico, devido ao carregamento uniforme  $q$ .

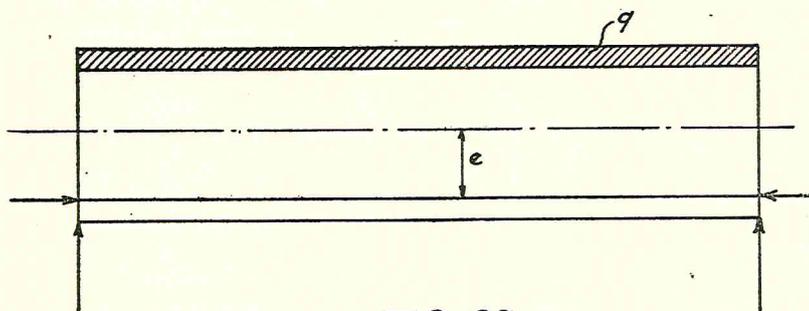


FIG. 22

Preliminarmente, admitamos que o cabo esteja perfeitamente juxtaposto, ancorado nas extremidades, porém sem tensão inicial.

Se o cabo fôr paralelo ao bordo inferior, o alongamento total do mesmo é igual ao alongamento total da fibra juxtaposta, também de afastamento  $e$  do baricentro. Nestas condições, sendo  $Mq$  o momento fletor devido a carga  $q$  numa secção qualquer, e  $T$  a tensão induzida no cabo em consequência da aplicação da carga, a tensão no perfil será, na fibra juxtaposta ao cabo:-

$$\sigma_{\text{viga}} = \frac{Mq \cdot e}{J} - \frac{T}{S} - \frac{T \cdot e^2}{J}$$

Donde:  $\epsilon_{\text{viga}} = \frac{\sigma_{\text{viga}}}{E} = \frac{Mq \cdot e}{EJ} - \frac{T \cdot i^2}{EJ} - \frac{T \cdot e^2}{EJ}$

O alongamento total, idêntico na fibra da viga e no cabo será:

com  $ds = dx$ ,  $\Delta l = \int_0^l \left( \frac{Mq \cdot e}{EJ} - \frac{T \cdot i^2}{EJ} - \frac{T \cdot e^2}{EJ} \right) dx$

Para  $Mq = \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}$  resulta:

$$\Delta l = \frac{1}{EJ} \left( \frac{q \cdot e \cdot l^3}{12} - T \cdot i^2 \cdot l - T \cdot e^2 \cdot l \right)$$

Onde fazendo:

$$T = \sigma_{\text{cabo}} \cdot S_{\text{cabo}}; \epsilon_{\text{cabo}} = \frac{\Delta l}{l}; \mu = \frac{S_{\text{cabo}}}{S}$$

Vem:

$$\sigma_{\text{cabo}} = \frac{q l^2 \cdot e}{12 [J + \mu S (i^2 + e^2)]} = \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{e}{J + \mu \cdot S (i^2 + e^2)}$$

$$T = \frac{q l^2}{12} \cdot \frac{\mu \cdot e}{i^2 (1 + \mu) + \mu \cdot e^2}$$

E a tensão no bordo inferior da viga na secção do meio do vão será:

$$\sigma_{\text{viga}} = \frac{q l^2}{8J} \left[ v_i - \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu \cdot e (i^2 + e \cdot v_i)}{i^2 + \mu (i^2 + e^2)} \right]$$

No caso em que:  $e \cong v_i$

$$\sigma_{\text{viga}} = \frac{q l^2}{8J} \cdot v_i \left[ 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu \cdot (i^2 + v_i^2)}{i^2 + \mu (i^2 + v_i^2)} \right]$$

Admitindo um perfil com:  $i = 0,85 v_i$

$$\sigma_{\text{viga}} = \frac{q l^2}{8J} \cdot v_i \left[ 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu (1,72)}{0,72 + 1,72 \mu} \right]$$

Para  $\mu = 3\%$ :

$$\sigma_{\text{viga}} = \frac{q \cdot l^2}{8J} \cdot v_i \left( 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{0,03 \times 1,72}{0,72 + 0,03 \times 1,72} \right) \cong 0,956 \cdot \frac{q \cdot l^2}{8J} \cdot v_i$$

Donde se observa ter havido uma redução de apenas 4,4% na tensão da viga.

Com estes mesmos valores teríamos para a tensão no cabo:

$$\sigma_{\text{cabo}} = \frac{ql^2}{8J} \cdot e \cdot \frac{2}{3} \times 0,95$$

Podemos dizer que:

$$\frac{\sigma_{\text{viga}}}{\sigma_{\text{cabo}}} = 1,5$$

Donde se observa que, no comportamento elástico, a inexistência de pro-  
tensão proporcionaria um aproveitamento muito baixo do cabo.

Por outro lado, nota-se que o crescimento de tensões no cabo será de cerca  
de 60% do crescimento de tensões na viga.

Se o cabo, em vez de paralelo à fibra inferior, apresentar (fig. 23) curvatura,

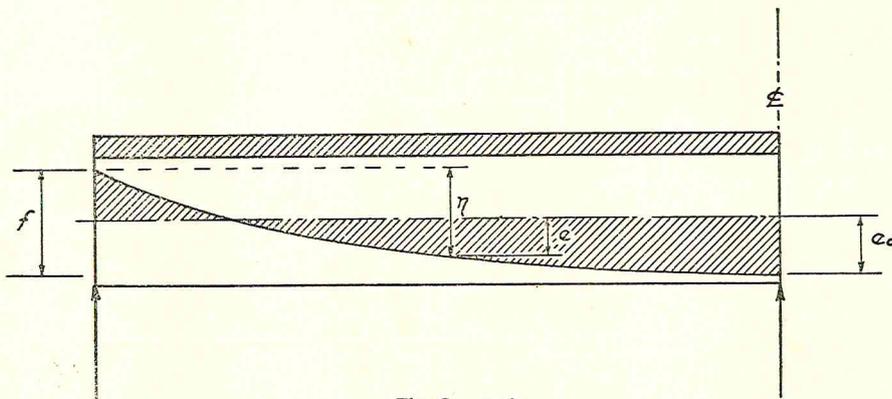


FIG. 23

digamos com desenvolvimento parabólico, com  $\eta = \frac{4f}{l^2} (l \cdot x - x^2)$  e, portanto

$$e_x = e_0 - (f - \eta) = e_0 - f \left[ \frac{l^2 - 4(l \cdot x - x^2)}{l^2} \right],$$

com os mesmos dados anteriores, fazendo  $f = 2e_0 = 2v_i$ , teremos  $\sigma_{\text{cabo}} = \frac{\sigma_{\text{viga}}}{2,5}$ ,

o que iria acarretar um incremento de tensões ainda menor no cabo.

Observamos ainda mais que, independentemente do estado inicial de pro-  
tensão, o crescimento de tensões no cabo, no regime elástico, será invariável-  
mente menor do que no perfil (salvo o caso, como das vigas armadas onde, o  
afastamento do cabo do bordo inferior da viga, poderia proporcionar um alonga-  
mento total suficiente para um crescimento de tensões, mais rápido do que no  
perfil).

Com um carregamento no regime elástico, o diagrama de tensões será, até que a fibra superior atinja a tensão de escoamento, o da figura 24a.

Prosseguindo o carregamento, a fibra inferior atingirá, também, a tensão de escoamento, o diagrama de tensões tendo o aspecto da fig. 24b.

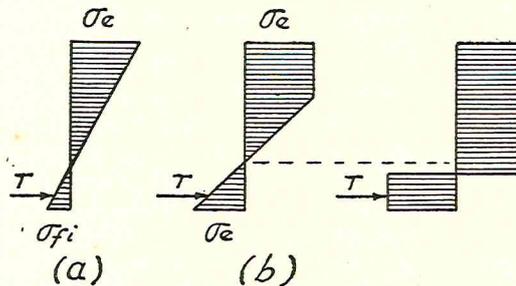


FIG. 24

Admitindo, com Neal (21) e Beedle(22) que, enquanto a seção não se plastifique completamente, as deflexões seguem as leis da teoria da elasticidade, então prosseguindo no carregamento, teremos o diagrama representativo da plastificação total da seção, como na fig. 24b. Todavia, o tirante ainda se comporta elasticamente e a estrutura será capaz de mais carga, até que possa girar livremente (mecanismo) e isto, até o limite elástico do tirante; o aumento da força do tirante, entretanto, acarreta o aparecimento de momento em sentido contrário, na viga, o que equivale dizer, causará uma mudança na zona plastificada da viga, ou seja, um abaixamento da linha neutra (o que se evidencia, outrossim, da necessidade de equilíbrio de forças), com conseqüente aumento da área de viga plastificada em compressão.

Assim, na formação da rótula plástica (ou seja, do mecanismo, porque se trata de barra simples), teremos uma condição final de equilíbrio (fig. 25).

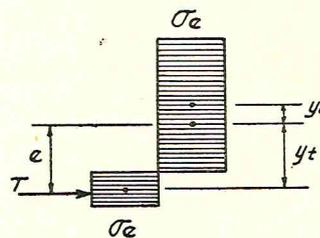


FIG. 25

$$S_{c. \sigma_e} = T + S_{t. \sigma_e}$$

$$M_{plast.} = T(e + y_c) + S_{t. \sigma_e}(y_t + y_c)$$

expressão idêntica à determinada anteriormente para a carga excêntrica  $N$ , em 1.1.4. Conclue-se, pois, que o problema da plastificação total e formação da rótula plástica, no caso de viga com tirante é absolutamente idêntico ao da plastificação da seção fletida com carga normal excêntrica, não obstante o caminhoamento seja diverso; no caso (tirante sem protensão inicial), para atingir o escoamento na fibra superior do perfil, um esforço consideravelmente menor

será necessário porque a força reativa do tirante é ainda diminuta, sendo todavia, crescente, e somente na fase final é atingido o valor máximo.

Analizemos, agora, o caso em que o cabo já se apresenta em tensão prévia (protensão), quando a carga cresce. É desnecessário frisar a importância de um certo carregamento, simultâneo com a aplicação da protensão, para que esta não proporcione tensões elevadas na peça, antes de sua utilização.

Um acréscimo de carga corresponde, na fase elástica, a um aumento de tensões na viga, devidas à flexão, bem como num conseqüente aumento de tensão no cabo, ipso-fato, na força  $F$  que, por agir excêntricaamente terá o mesmo comportamento do caso anterior; em vista de que e, como o crescimento das tensões no cabo se faz muito mais lentamente do que na viga, e sendo muito mais elevado o seu limite de escoamento, é evidente que as fibras extremas da viga atingirão  $\sigma_e$  antes que o cabo atinja  $\sigma_e^*$ ; as várias fases (v. diagramas fig. 26) serão atingidas como no caso anterior, e a situação final será, outrossim, absolutamente idêntica ao caso em que o cabo não tem tensão inicial. É óbvio que, para casos em que a armadura do tirante seja excessiva, ter-se-á possibilidade de atingir deformações capazes de inutilizar a peça, embora não tenha ocorrido o escoamento da armadura de protensão. O máximo valor de  $T$  será  $S_{\sigma_e} = S_p \cdot \sigma_e^*$ , condição na qual haveria plastificação total do perfil em compressão e do tirante em tração.

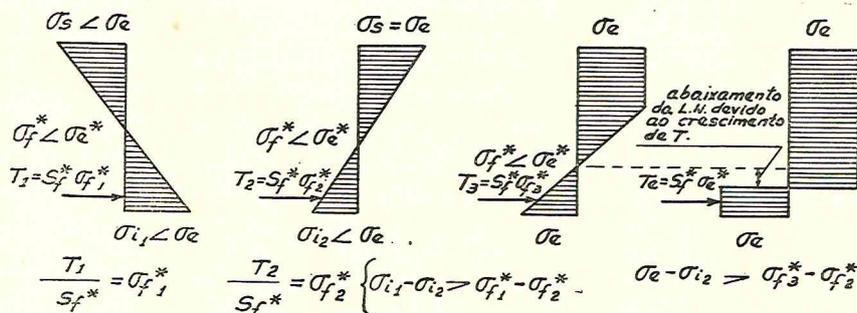


FIG. 26

Isto, todavia, e como se demonstra a seguir, só pode ocorrer com o tirante tangenciando a secção, uma vez que as deformações na linha de juxtaposição serão as mesmas para os dois elementos.

Sendo  $\eta$  (fig. 27), a posição do tirante de protensão, a zona comprimida estará acima de  $\eta$ , para que uma parte da secção possa ser plastificada em tração e para que possa ser mantida a hipótese de conservação da secção plana. A hipótese de um valor inicial de protensão no tirante, acompanhado de um valor adequado de momento fletor, poder plastificar completamente a secção em compressão, somente caberia se o tirante comportasse, ainda na fase elástica, uma força total capaz de tal; o que com efeito, é impossível de se atingir pelo carregamento, o qual provocando aumento de força no tirante iria também distendê-lo e destarte, reduzir o encurtamento da viga naquele ponto, impedindo o encurtamento de plastificação a compressão; a menos que a peça já partisse de uma plastificação da zona inferior ao cabo, isto é, de uma protensão não utilizável.

Resta ainda acrescentar que, a diferença fundamental, quando partimos do tirante protendido é que uma série de deformações já estão compensadas, isto é, o tirante atinge o escoamento com uma diferença de deformação muito menor.

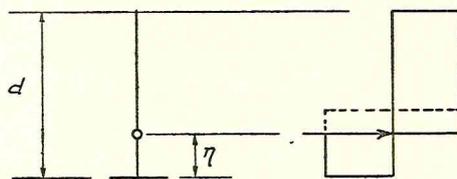


FIG. 27

Estudaremos, mais tarde, o caso em que o tirante tem pontos intermediários de fixação no perfil (cujo comportamento é, de certo modo, assemelhável à aderência, no concreto protendido) e no qual, a variação de tensões ocorre de maneira idêntica à da viga, durante a fase elástica, retardando o escoamento do perfil pela maior capacidade portante do tirante, nesta ocasião.

## 2.2. PEÇAS EM CONCRETO PROTENDIDO

### 2.2.1. Generalidades

Neste capítulo faremos, preliminarmente, tão somente um sumário dos principais métodos propostos para a verificação a ruptura das secções em concreto protendido.

Naquêles casos em que se nos tornou impossível individualizar a efetiva origem de um método, citamos os vários autores responsáveis pela respectiva divulgação.

Nos primórdios, o problema de verificação a ruptura, do concreto protendido, foi encarado antes como mera contribuição, como simples comprovação complementar; já na sua fase atual, todavia, observa-se a marcada tendência de se utilizar o cálculo a ruptura como fundamental e, inversamente do que ocorria, lançar mão dos estados intermediários como eventual subsídio à verificação.

Nosso objetivo, que é o comportamento plástico das estruturas de concreto protendido, não se limita ao campo da verificação individual das secções mas estende-se às conseqüências da plastificação sobre o comportamento da estrutura como um todo monolítico.

### 2.2.2. Métodos de cálculo das secções

#### 2.2.2.1. Método do Regulamento Francês (Guyon, Lebelle, STUP.) (23)

##### a) Ruptura da Secção pela ruptura da armadura:

É sabido que a ruptura de uma secção é consecutiva à abertura de uma larga fissura, na mesma. Tal fissuramento implica num escorregamento do aço em relação ao concreto, o que efetivamente ocorre, uma vez que a aderência, que varia inversamente ao coeficiente de Poisson (de 0,25 a 0,3 na fase elástica e de 0,5 na plástica) desaparece face à grande contração transversal do aço.

O processo de ruptura é semelhante ao de uma viga de concreto armado que rompe por insuficiência de aço. Entretanto, o momento de ruptura de uma viga de concreto protendido é nitidamente superior ao valor encontrado pela fórmula de Chambaud (24) para uma viga de concreto armado com a mesma armadura e características geométricas. Parece que a protensão, isto é, a tensão prévia dos fios, absorve uma parte do deslocamento angular das duas faces da fissura aumentando assim, a altura de concreto interessada pela compressão, e, conseqüentemente, retardando a ruptura. Um detalhe a corroborar este ponto de vista é que, em alguns casos, a ruptura de vigas de concreto protendido, se faz pelo rompimento dos fios, permanecendo o concreto ileso.

Guyon, com base em ensaios, concluiu que:  $M_{\text{Raço}} = 0,9 h \cdot S_{\text{fd}} \cdot \sigma_{\text{rf}}$  que indica o valor do momento de ruptura por insuficiência de aço.

O valor de  $M_{\text{Raço}}$ , deduzido da experiência, sugere a explicação simplificada da ruptura (fig. 28); os aços sendo tendidos até o seu limite de ruptura e o con-

creto sendo submetido a uma tensão uniforme de compressão sobre a altura comprimida.

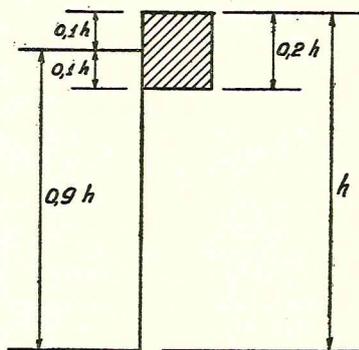


FIG. 28

Em geral, os aços são, provavelmente, um pouco menos tendidos, mas sua tensão, fora de dúvida, é próxima ao limite de ruptura, tanto que é freqüente romperem-se no decurso dos ensaios.

A hipótese da tensão uniforme no concreto equivale a admitir um diagrama retangular de distribuição de tensões, em vez do diagrama preconizado por Chambaud (*op. cit.*) o que, afinal de contas, não constitúe diferença significativa já que, tal diagrama (retangular) corresponde ao mínimo valor da máxima tensão de compressão do concreto. Nestas condições, aquela fórmula implica em admitir que a zona comprimida de concreto atinge  $\frac{1}{5}$  da altura útil da secção.

Mediante representação gráfica dos resultados de ensaios em função do momento de comparação ( $\sigma_{rf} \cdot S_f \cdot h$ ), obteve Guyon (fig. 29 a e b) que os resultados se alinham no entôrno de uma reta: para um grupo de ensaios a inclinação da reta era de 0,94; para outro, 0,88. Donde as leis médias:

$$0,94hS_f \cdot \sigma_{rf} \text{ e } 0,88h \cdot S_f \sigma_{rf}$$

A validez da fórmula de Guyon supõe, evidentemente, que a zona comprimida de concreto seja capaz de equilibrar, no mínimo, uma compressão igual a tração de ruptura  $S_{fp} \cdot \sigma_{rf}$ ; na hipótese disto não se verificar, depara-se-nos o problema da ruptura por esmagamento do concreto. Tal tipo de ruptura, todavia, no concreto protendido, é raro; segundo Robinson, <sup>(25)</sup> dentre os inúmeros ensaios de Guyon, somente em dois casos, apenas, houve esmagamento do concreto antes que o aço atingisse sua máxima tensão.

Atentando-se para a figura 28, sendo  $x = \frac{h}{5}$ , segue-se que a máxima compressão seria  $\frac{h \cdot b}{5} \cdot \sigma_{cáb}$ . Todavia, para casos de vigas com mesa superior bastante altas, Guyon, em função de resultados de ensaios, estima a aplicação daquela lei até o limite:  $b \cdot h \cdot \sigma_{cáb} = 4 \cdot S_f \cdot \sigma_{rf}$ , o que permite concluir que a área comprimida será maior, neste caso:

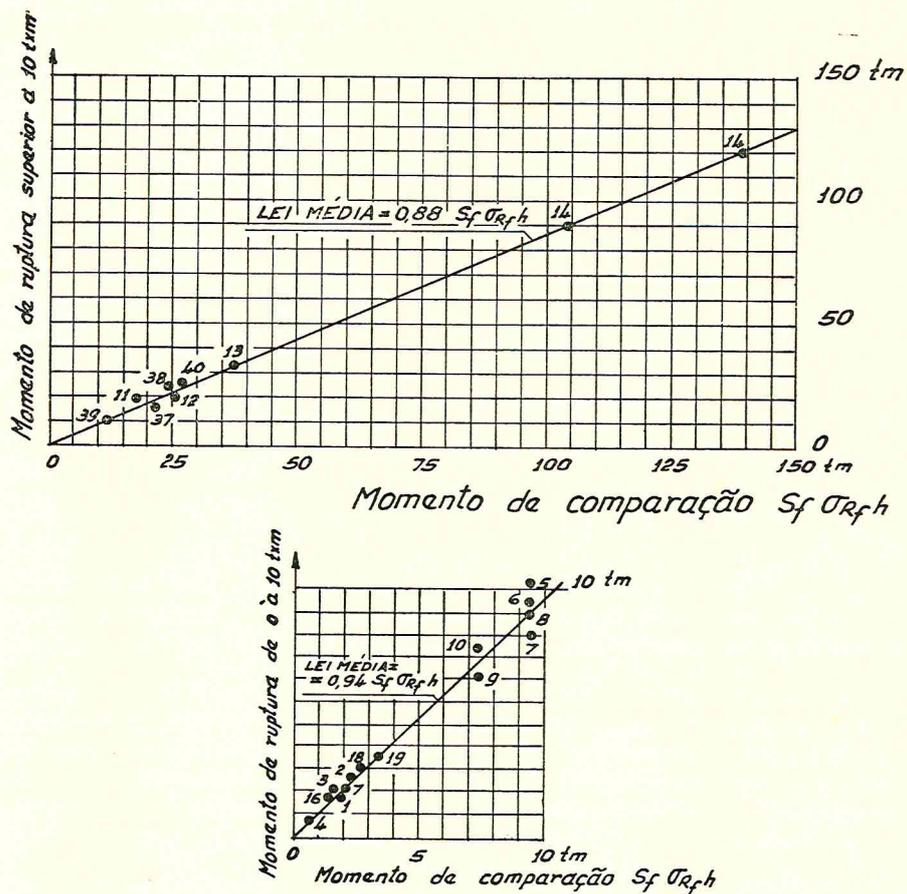


FIG. 29

$$0,9\ h \times 0,25\ b \cdot h \cdot \sigma_{cúb} \geq S_f \cdot \sigma_{Rf} \times 0,9h$$

$$0,225\ b \cdot h^2 \cdot \sigma_{cúb} \geq M_{R_{aço}}$$

ou:

$$M_{R_{concr.}} \geq M_{R_{aço}}$$

$$M_{R_{concr.}} \geq 0,225\ b h^2 \cdot \sigma_{cúb}.$$

A correção para o braço de alavanca, que não é feita — e que, de resto, não é de grande monta — sugere-nos a possibilidade de compensação do erro que se introduz, pela admissão do diagrama retangular de distribuição de tensões.

Por outro lado, infere-se que a porcentagem crítica de armadura

$\mu = \frac{S_f}{b \cdot h} = 0,25$  define os campos de ruptura, por insuficiência do aço ou do concreto.

É evidente que o valor do momento de ruptura deve crescer com a porcentagem de armadura; todavia, as expressões divulgadas não fazem referência a esta variação, muito embora admitida como efetiva, inclusive por Chambaud (*op. cit.*).

Para as vigas T, ainda Guyon admite a aplicabilidade desta fórmula, restringindo-a, todavia, as espessuras  $d$  da mesa, tais que  $d \geq 0,25h$ . Para  $d \leq 0,25h$  chamando  $b$  a largura da mesa, e  $b_0$  a da alma:

$$\sigma_{\text{c mesa}} = (b - b_0) \cdot d \cdot \sigma_{\text{cúb}}$$

$$M_{\text{R mesa}} = (b - b_0) \cdot d \cdot \sigma_{\text{cúb}} \cdot 0,9h$$

A expressão implica na admissão de que, para  $d \geq 0,20h$ , o valor de  $\sigma_{\text{cúb}}$  está sendo tomado algo maior do que seu valor de ensaios; por outro lado para  $d \leq 0,20h$ , menor.

Para o momento de ruptura total  $M_{\text{Rc}}$ , do concreto, deve-se acrescentar a parcela correspondente à alma.

Dado o relativamente pequeno número de ensaios — eventualmente, apenas considerações de ordem teórica — sobre que se fundamentam as fórmulas acima, infere-se — e é o próprio Guyon quem friza — seu caráter aproximativo.

### 2.2.2.2. Método de Rös

Rös propõe seja extendido ao concreto protendido o método da EMPA, de Zurich, para concreto armado.

Admitindo-se que o aço e o concreto atinjam simultaneamente os respectivos limites de resistência, sejam:

$\sigma_{\text{rf}}$  — tensão de ruptura do aço.

$\sigma_{\text{cúb}}$  — resistência cúbica do concreto;

para a secção com  $b$  constante na zona comprimida (fig. 30).

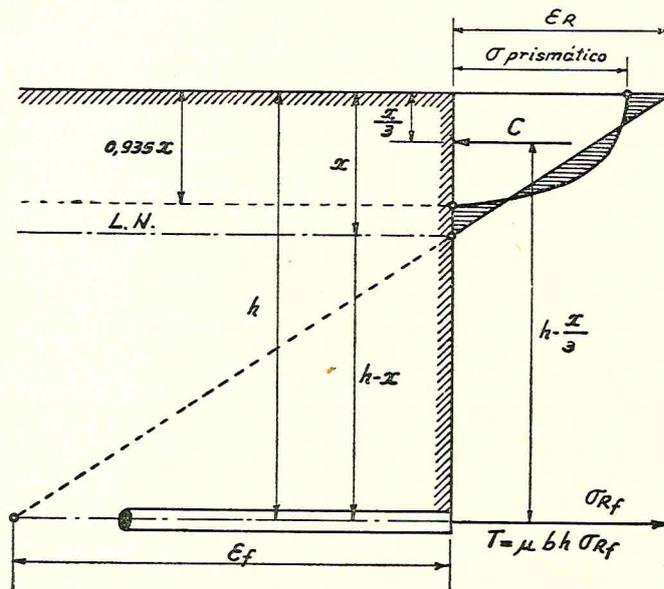


FIG. 30

$$\bar{M}_R = \sigma_{Rf} \cdot S_f \cdot \left( h - \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_{Rf} \cdot S_f}{b \cdot \sigma_{cúb}} \right) = \sigma_{Rf} \cdot S_f \cdot h \cdot \left( 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{S_f}{bh} \cdot \frac{\sigma_{Rf}}{\sigma_{cúb}} \right)$$

Para distribuição retangular de tensões o braço de alavanca seria  $(h - 0,5x)$ ; para a distribuição proposta por Rös,  $x = k_x \cdot h$ ;  $\beta \cdot x = \beta \cdot k_x \cdot h$ ;  $\beta k_x =$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_{Rf}}{\sigma_{cúb}} \mu = 0,66\mu \cdot \frac{\sigma_{Rf}}{\sigma_{cúb}}; \text{ em vez de } 0,5\mu \cdot \frac{\sigma_{Rf}}{\sigma_{cúb}}, \text{ correspondente àquela.}$$

A fórmula da EMPA dá resultados bastante satisfatórios para peças com baixa porcentagem de armadura, que atingem a ruptura pelo aço(\*). Posto que não apresentem patamar de escoamento, não será possível aos aços empregados, a deformação indispensável para que o concreto atinja a taxa de ruptura.

Baseado em grande número de ensaios, Rös demonstrou, pela primeira vez, que a resistência limite de uma viga de concreto protendido depende, fundamentalmente, do grau de protensão. (fig. 31).

Pelo aumento do valor do esforço de protensão, a tensão efetiva do aço, bem como o esforço de tração são aumentados, de modo que, para manter a condição de equilíbrio externo, a linha neutra sofre um abaixamento, aumentando, conseqüentemente, a área da zona de compressão, e a resistência limite da peça. A fig. 31 ilustra, com clareza, tal processamento. — Reportando-nos ao exposto no item 2.1.2. verificamos o abaixamento da linha neutra quando a armadura não atinja o seu limite de ruptura.

Observação importante é que no aço, a resistência a tração, (em fase de transferência) permite encurtamentos muito maiores que no concreto havendo, assim, possibilidade, de plastificação em compressão em tôda a secção do perfil; já no concreto — e aí reside uma das diferenças fundamentais entre os dois materiais — isto não ocorre, em razão do fissuramento e perfeita definição da área comprimida; mais ainda, pela impossibilidade de recuperar a área fissurada já que as deformações no concreto comprimido iriam acarretar a desintegração da peça.

### 2.2.2.3. Método de Mörsch (27)

A solução grafo-analítica de Mörsch, praticamente abrange os dois tipos de ruptura de vigas de concreto protendido.

a) **Ruptura pelo esmagamento do concreto** — A forma do diagrama de tensões da zona comprimida é uma curva afim do diagrama tensão-deformação do concreto, qualquer que seja a altura  $x$  da linha neutra, (fig. 32 a e b).

(\*) A propósito, e face à semelhança de comportamento com o concreto armado, acreditamos perfeitamente cabíveis para o concreto protendido as denominações, já consagradas para aquêle, de peças sub- e super- armadas.

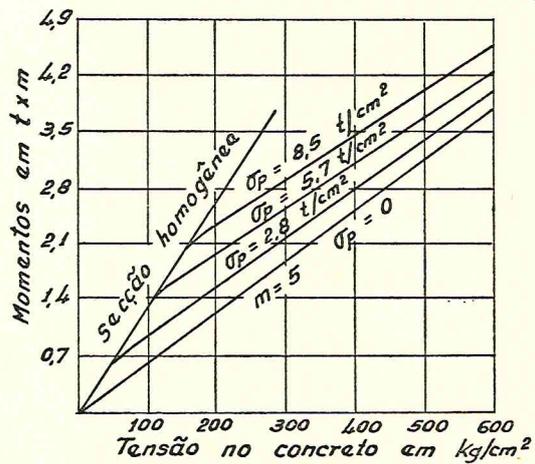
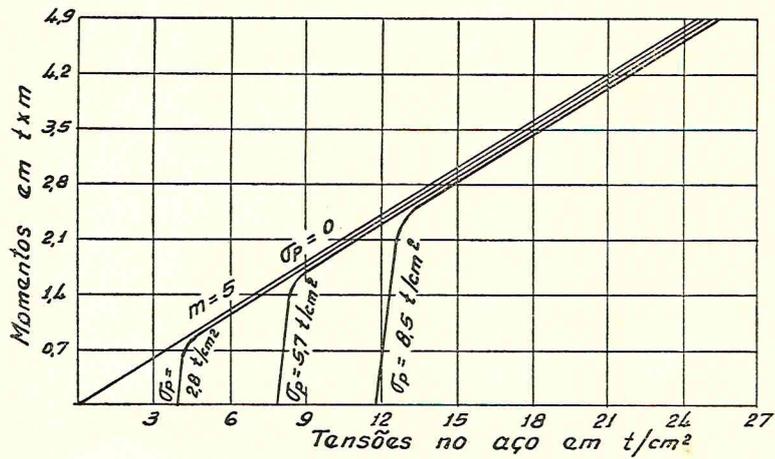
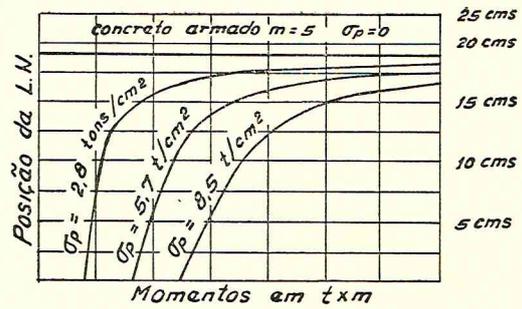


FIG. 31

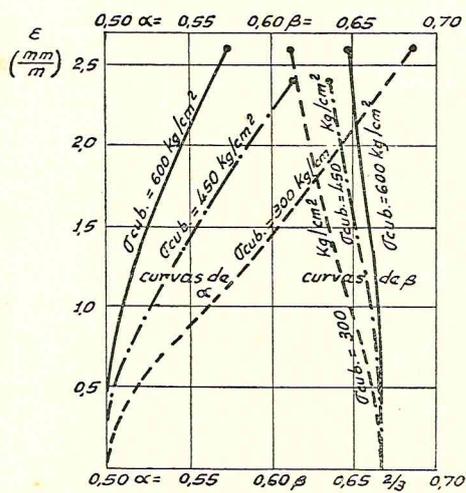
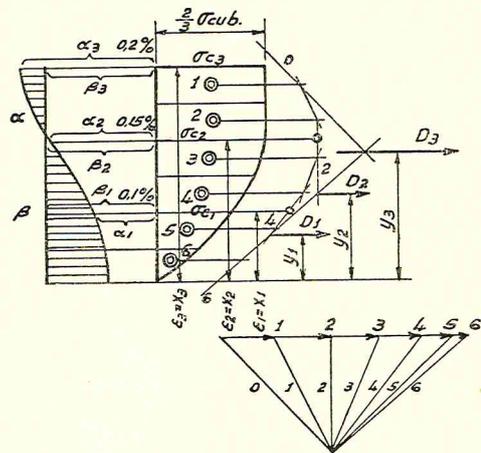
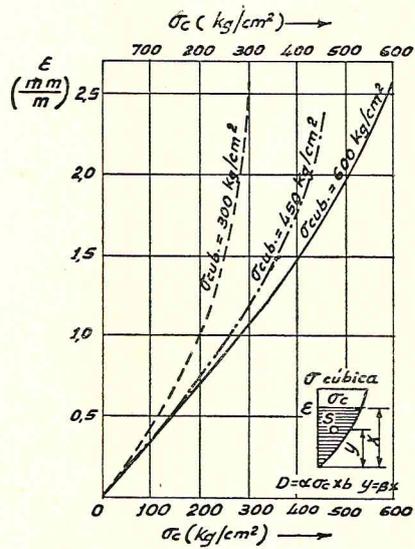


FIG. 32

donde a força de compressão,  $C = \alpha \cdot b \cdot x \cdot \sigma_{prism}$ , onde  $\sigma_{prism} = \sigma_{max}$ , é o valor conhecido da resistência prismática do concreto.

A distância do centro de gravidade da área comprimida à linha neutra é dada por  $\beta \cdot x$ .

Fixados o diagrama tensão-deformação e o valor  $\sigma_{prism}$ , os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  serão constantes para todos os diagramas possíveis, de zona comprimida, assumindo a deformação na fibra de tópo o seu máximo valor  $\epsilon_c$ , determinado pelo ensaio de esmagamento.

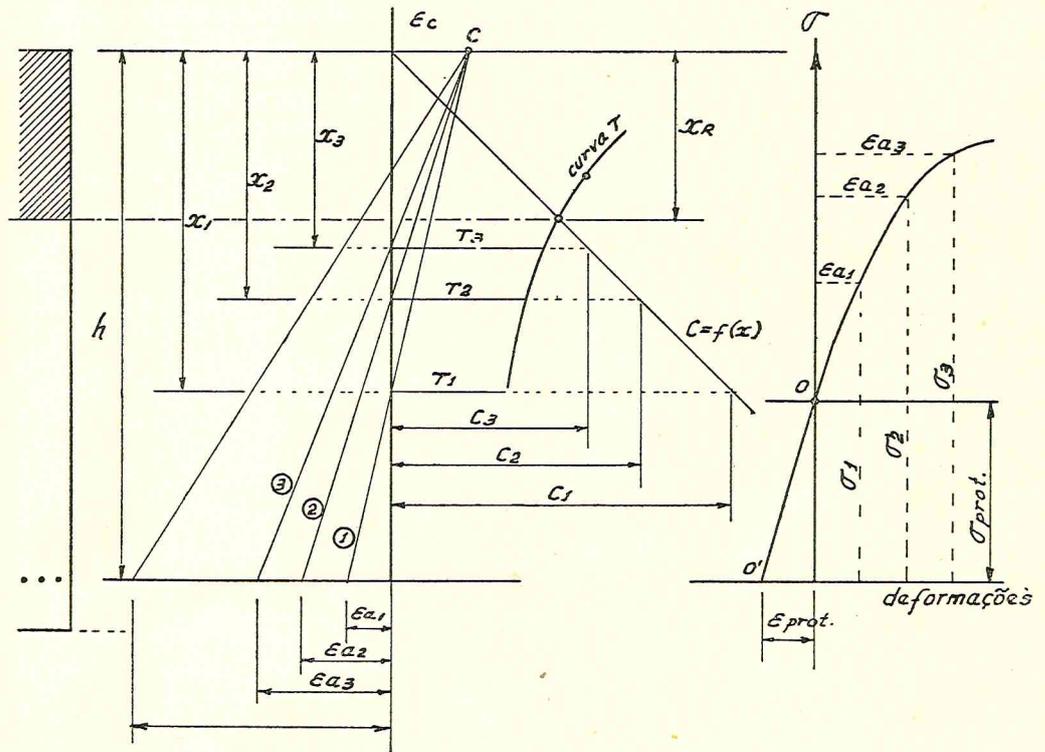


FIG. 33

Colocamos em gráfico (fig. 33a), no tópo superior, o valor  $\epsilon_c$  máximo e' no inferior, vários valores de deformação  $\epsilon_a$  do aço; traçando a partir de C (determinado por  $\epsilon_c$ ), as retas 1, 2, 3, que correspondem às deformações  $\epsilon_{a1}$ ,  $\epsilon_{a2}$ , ..., as intersecções com a vertical AB de referência estarão em alturas  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , ..., que determinam a posição da linha neutra, em cada caso.

No diagrama tensão-deformação do aço (fig. 33b), faz-se a leitura da tensão  $\sigma_f$  ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , ...) correspondente à deformação considerada ( $\epsilon_{a1}$ ,  $\epsilon_{a2}$ ,  $\epsilon_{a3}$ , ...). É evidente que a correspondência de defo mações se dará a partir de uma origem O de coordenadas ( $\sigma_{prot.}$ ,  $\epsilon_{prot.}$ ) ou sejam, a tensão inicial de protensão e a correspondente deformação.

No caso de concreto protendido com barras aderidas, a tensão inicial  $\sigma_{prot.}$  corresponde à deformação  $\epsilon_{prot.}$ ; para o caso de barras não aderidas com tensão  $\sigma_{prot.2}$  (posterior), a deformação será a correspondente a uma tensão imaginária  $\sigma_{prot.1}$  na qual o concreto não tenha tensão, expressa por:

$$\sigma_{\text{prot.1}} = \sigma_{\text{prot.2}} (1 + \mu \cdot n \cdot r)$$

na qual  $\mu$  = porcentagem de aço,  $n = \frac{E_f}{E_c}$  (assumido por Morsch igual a 7)

e  $r$ , o coeficiente de excentricidade dado por  $\left(1 + \frac{e^2}{i^2}\right)$ , e sendo a excentricidade do cabo, e  $i$  o raio de giração da secção transversal(\*).

Conhecidas as tensões  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$ , correspondentes às posições  $x_1, x_2, x_3, \dots$  da linha neutra, marcamos os valores  $T_1 = \sigma_1 \cdot S_f$ ;  $T_2 = \sigma_2 \cdot S_f$ ;  $\dots$ , com o que traçamos a curva dos valores  $T$ . De maneira semelhante determinam-se os valores da força de compressão correspondente,  $C_1 = \alpha \cdot b \cdot \sigma_{\text{prism.}} \cdot x_1$ ;  $C_2 = \alpha \cdot b \cdot \sigma_{\text{prism.}} \cdot x_2$ , suficientes para definir a reta  $C = f(x)$ . O ponto comum à reta  $C$  e a curva  $T$ , satisfará a condição de equilíbrio ( $C = T$ ) e definirá a posição da linha neutra no instante da ruptura ( $x_R$ ). O momento de ruptura será pois:

$$M_R = \alpha \cdot b \cdot x_R \cdot \sigma_{\text{prism.}} \cdot (d - x_R + \beta \cdot x_R) = \alpha \cdot b \cdot x_R \cdot \sigma_{\text{prism.}} \cdot [d - x_R(1 - \alpha)]$$

#### b) Ruptura por insuficiência do aço.

Neste caso o aço alcança a sua tensão limite  $\sigma_{Rf}$ , ocasião em que  $T = S_f \cdot \sigma_{Rf}$  é o esforço de tração máximo que atinge a armadura. Um método semelhante ao exposto na hipótese anterior é, então, empregado para a solução do problema.

A partir de  $C$  (fig. 34), determinado por  $\epsilon_{fR} = AC$ , determinam-se os valores  $\epsilon_{c1}, \epsilon_{c2}, \dots$ , e as alturas  $x_1, x_2, \dots$ , da linha neutra.

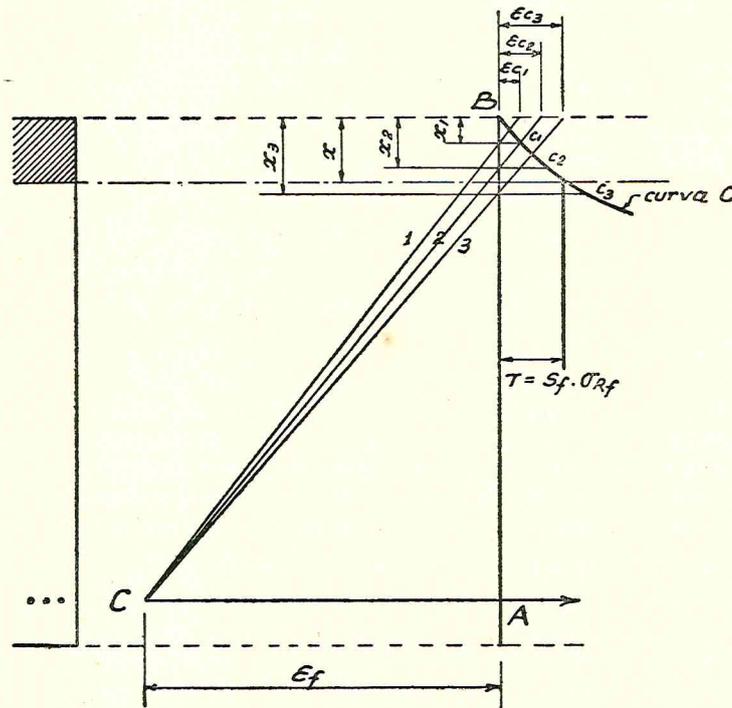


FIG. 34

(\*) Os valores característicos do coeficiente seriam:  $r = 2$  (para  $e = i$ ) e  $r = 1$  ( $e = 0$ ), protensão axial.

No diagrama tensão-deformação do concreto, procede-se à leitura das deformações  $\epsilon$  e tensões  $\sigma$  respectivas, donde as forças de compressão  $C_1 = \alpha_1 \cdot b \cdot x_1 \cdot \sigma_{c1}$ ,  $C_2 = \alpha_2 \cdot b \cdot x \cdot \sigma_{c2}$ , que constituirão, agora, a curva C.

A expressão de T, sendo a de uma constante, independente da posição da linha neutra, sua representação será a de uma reta paralela a linha AB, com afastamento  $T = S_f \cdot \sigma_{rf}$ .

O momento de ruptura será agora:

$$M_R = S_f \cdot \sigma_{rf} (d - x + \beta \cdot x) = S_f \cdot \sigma_{rf} [d - x(1 - \beta)]$$

#### 2.2.2.4. Método de King. (28)

O método de King baseia-se, inteiramente, nos diagramas tensão-deformação do aço e concreto sem o emprêgo, todavia, de razão modular. O processo, também grafo-analítico, permite a obtenção do momento de ruptura, sem aplicação de fórmulas especiais, baseando-se, unicamente, na correlação tensão-deformação. Isto se constitui, sem dúvida, numa vantagem de simplificação; além disso, os vários diagramas tensão-deformação aplicados, retratam fielmente o comportamento da secção, progressivamente, à medida que se desenvolve o processamento.

Os comentários à (fig. 35) ilustram o método, em linhas gerais, na sua essência.

Sejam, na figura:

- (a) Secção transversal retangular de uma viga em concreto protendido.
- (b) e (c) Diagramas tensão-deformação, respectivamente para o aço e o concreto utilizados.
- (d) Diagrama de distribuição de deformações produzidas pelo momento fletor M, devido ao carregamento.

O diagrama tensão-deformação do concreto (fig. 35 b) permitirá conhecer as tensões correspondentes, cuja distribuição tem o aspecto da figura 35 e. O momento externo aplicado será, então, equilibrado pelo binário  $TZ = C.Z$ .

Submetida agora, a peça, à transferência da força de protensão teremos a distribuição de deformações como na fig. 35 f. Do mesmo modo, como já foi explicado, obter-se-á o diagrama correspondente de tensões (fig. 35g). É importante notar que, via de regra, as tensões devidas à protensão situam-se na fase elástica. É óbvio que a protensão considerada isoladamente, isto é, quando não se leva em conta nenhum momento exterior aplicado à viga, obrigará à co-linearidade as resultantes de protensão e de compressão no concreto, desprezando-se qualquer resistência do concreto a tração. No caso de se considerar uma pequena colaboração do concreto a tração, o centro de gravidade da armadura coincidirá com a resultante das áreas dos diagramas triangulares de tração e compressão.

Extendendo-se a mesma conceituação até aqui seguida, ao domínio plástico e à ruptura, os diagramas serão do tipo dos representados nas figuras 35 h e i.

O momento na ocasião da ruptura, será pois:

$$M_R = T.Z$$

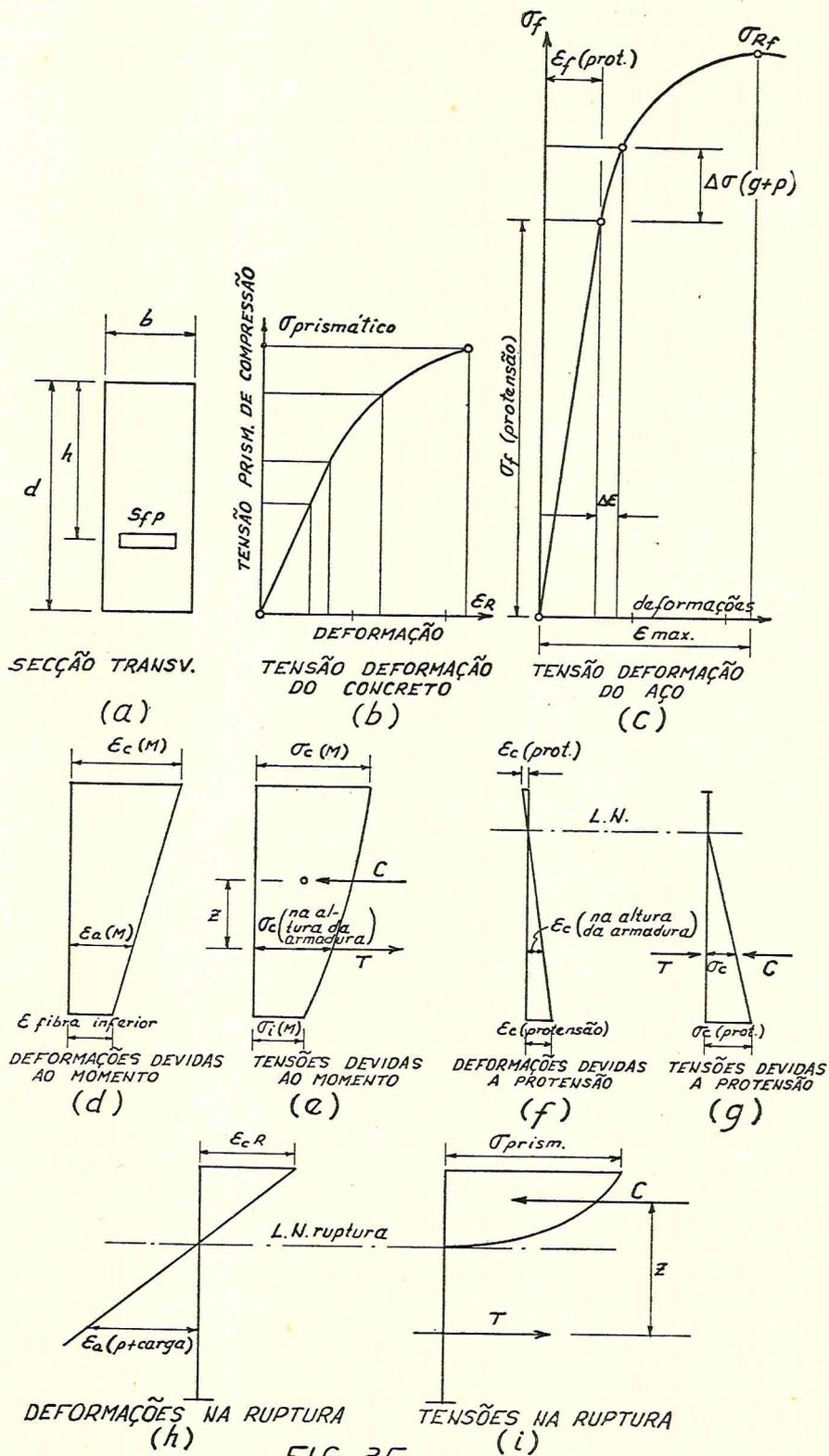


FIG. 35