

A posição da linha neutra, neste instante, como facilmente se conclue pela simples inspecção da figura 35i corresponde à tensão limite do concreto (igual à resistência prismática e à qual corresponde a deformação máxima  $\epsilon_R$ ).

Em geral, assume-se que a tensão dos cabos, no instante da ruptura, não é superior a 0,1% da tensão convencional de escoamento do aço. Ultrapassada esta tensão, os fios apresentarão grandes deformações para pequenos aumentos de tensão e, à medida que se aproxima a ruptura, a linha neutra vai-se elevando, até atingir a condição em que há igualdade entre a máxima tensão de compressão no concreto e a resistência a compressão.

A fim de que haja compatibilidade, sob a ação do carregamento externo, na ocasião da transferência, a variação da deformação dos cabos e do concreto deve ser a mesma — local, se os cabos forem aderidos e, caso não o sejam, na extensão total da viga. Desde que tais condições se verifiquem em dois estágios críticos (na transferência e na ruptura, por ex.), as situações intermediárias são de menor importância, a menos que, por razões outras deseje-se investigar o comportamento da peça sob as cargas de serviço; seria o caso, por exemplo, de obter-se uma comprovação ao fissuramento.

Entre a transferência e a ruptura, a variação da deformação dos cabos, em peças aderidas é:

$$\Delta\epsilon = \epsilon_{fp} + \epsilon_{prot.} + g + p$$

a qual raramente excede 0,15%.

Na ruptura, a deformação para o aço ( $\epsilon_{total}$ ) é lida diretamente do diagrama respectivo (fig. 35b) e seu valor pode ser da ordem de 0,6%. Donde se conclue a deformação produzida nos cabos, na transferência,

$$\epsilon_{inicial} = \epsilon_{total} - \Delta\epsilon$$

correspondente à protensão inicial.

Para os valores assumidos:

$$\epsilon_{inicial} = \frac{0,6 - 0,15}{100} = 0,0045$$

em correspondência ao qual ler-se-á, no diagrama tensão-deformação, o valor  $\sigma_{p1}$ . Cabe notar que este valor, assim obtido, é a máxima protensão compatível com o estágio final de ruptura e a variação de deformações nos estágios de transferência e ruptura. Outrossim, não é aconselhável usar valores mais baixos para a protensão.

Tendo-se em mira o projeto econômico da secção, claro está que se procura dar ao concreto o máximo de aproveitamento, para o que se procura situar a linha neutra na ruptura, o mais baixo possível ( $k_x = 0,65$  p. ex.). Tal condição, todavia, quase sempre conduziria a quantidades exageradas de aço e, na transferência, a tensões muito elevadas para o concreto. Assim, melhor seria elevar mais a linha neutra, na ruptura ( $k_x = 0,4$  p. ex.), o que levaria, sem dúvida, a um projeto mais equilibrado.

#### 2.2.2.5. Método de Rusch (29)

Em vigas com baixa porcentagem de armadura, a deformação de tração sempre alcança o seu máximo valor  $\epsilon_f = \text{máx.}$ , isto é, 0,5% — correspondente à carga crítica. Se o momento fletor atuante é pequeno, a posição da linha neutra

é próxima do tópo superior, já que  $\epsilon_c$  é também pequena. Entretanto, para um momento fletor crescente, a linha neutra se desloca, para baixo evidentemente, à medida que a fibra superior experimenta cada vez maiores encurtamentos, até alcançar o seu valor limite (da ordem de 0,2%). Atingido este ponto, como a deformação de compressão do concreto não pode mais crescer, então a deformação de tração é que começa decrescer, prosseguindo assim, até abaixo de um limite mínimo da ordem de 0,2%.

Neste tipo de vigas,  $\epsilon_{f\text{máx}}$ , é uma constante e cresce até o seu máximo valor. Já nas vigas com porcentagem normal de armadura,  $\epsilon_{c\text{máx}}$  é uma constante e  $\epsilon_f$  terá o valor compreendido entre 0,2 e 0,5%.

Os requisitos para aplicação do método são os seguintes:

a) Conhecimento do coeficiente  $\alpha$ , característico da área do diagrama da zona comprimida e, também a relação entre a tensão de ruptura do concreto em flexão e a resistência cúbica ao esmagamento, isto é:

$$C = \alpha \cdot b \cdot x \cdot \sigma_{c\text{úb}}$$

O fator  $\alpha$  não só corrige a área retangular  $b \cdot x$ , como também a tensão  $\sigma_{c\text{úb}}$  para a tensão  $\sigma_{c\text{efetiva}}$ .

b) Conhecimento do coeficiente  $\beta$  que define o centro de gravidade do diagrama comprimido a uma distância  $\beta x$  do bordo superior. Melhor talvez, seria dizer, define a posição da resultante das tensões de compressão no concreto:

$$Z = h - \beta \cdot x$$

c) Deformação máxima (encurtamento) de ruptura  $\epsilon_c$

— RÜSCH recomenda os seguintes valores médios:

$$\alpha = 0,75 \text{ a } 0,80; \beta = 0,40; \text{máx.}\epsilon_c = 0,2\%$$

Sendo:

$\epsilon_c$  = deformação na fibra extrema da zona comprimida.

$\epsilon_f$  = deformação de tração no centro de gravidade da armadura.

$\epsilon_{fp}$  = deformação no aço, causada pela carga externa.

$\epsilon_{fP}$  = deformação no aço causada pela protensão (na mesa de protensão).

No caso de post-tensão,  $\epsilon_{fP}$  é ainda um valor teórico, calculado na hipótese de tensões nulas no concreto.

A deformação total será:

$$\epsilon_f = \epsilon_{fp} + \epsilon_{fP}$$

A posição da linha neutra é dada por:

$$x = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c + \epsilon_{fp}} \cdot h$$

O braço de alavanca:

$$Z = h - \beta \cdot x$$

A força total de compressão:

$$C = \alpha \cdot b \cdot x \cdot \sigma_{c\text{úb}} \text{ ou } x = k_x \cdot h, C = \alpha \cdot k_x \cdot b h \cdot \sigma_{c\text{úb}}$$

Da condição de equilíbrio de forças  $\Sigma N = 0$ :

$$\alpha \cdot b \cdot x \cdot \sigma_{cúb} = S_{fp} \cdot \sigma_f$$

Da condição de equilíbrio de momentos  $\Sigma M = 0$ :

$$M_x = k_x \cdot \alpha \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_{cúb} (1 - \beta \cdot k_x)$$

A porcentagem de aço será obtida de:

$$\mu = \frac{S_f}{b \cdot h} = \frac{\alpha \cdot b \cdot x \cdot \sigma_{cúb}}{\sigma_f \cdot b \cdot h} = \frac{\alpha \cdot k_x \cdot \sigma_{cúb}}{\sigma_f}$$

A tensão  $\sigma_f$  corresponde à deformação dada pela equação:

$$\epsilon_c = \epsilon_{fp} + \epsilon_{fp}$$

Quando todas as dimensões são dadas, a posição genérica da linha neutra é dada pela solução do sistema:

$$\begin{cases} \sigma_f = \frac{\alpha \cdot \sigma_{cúb} \cdot k_x}{\mu} \\ \epsilon_{fp} = \frac{1 - k_x}{k_x} \cdot \epsilon_c \end{cases}$$

À deformação  $\epsilon_{fp}$  é adicionado o valor  $\epsilon_{fp}$  produzido pela protensão e então, no diagrama tensão-deformação, a tensão correspondente  $\sigma_f$ .

#### 2.2.2.6. Método de Baker (*Op. cit.*)

Interpretando os ensaios realizados por sua equipe do Imperial College (Londres) em vigas protendidas, A. L. L. Baker mostrou que a posição da linha neutra varia dentro de uma grande faixa função, principalmente, da aderência e do grau de protensão.

O eixo neutro é situado em função das fibras extremas pela consideração simultânea da limitação da deformação e do equilíbrio entre forças internas, externas e momentos. Os valores limites das deformações são obtidos experimentalmente.

Também através ensaios, são obtidos os coeficientes  $\alpha$  (conformação e grandeza do diagrama de compressão) e  $\gamma$  (centro de gravidade do mesmo diagrama).

Mediante tais elementos se pode, então, calcular as resultantes de tensões C e T do binário interno e, finalmente, o momento de ruptura.

Baker dá, neste método, particular importância à fixação de valores limites de segurança; assim, por ex., a deformação limite do concreto é admitida como 0,2% — Na deformação lenta, entretanto, tal valor pode ser elevado até 0,4%. Há a considerar, porém, que este limite é atingido muito vagarosamente e, à medida que cresce o efeito da deformação lenta, aumenta também a resistência a esmagamento da viga.

O método emprega um certo número de coeficientes para chegar a expressão genérica da capacidade de carga de uma viga, abrangendo todos os casos possíveis: peças em concreto armado ou protendido, com ou sem aderência, com protensão prévia ou posterior.

A linha neutra é dada pôr:  $x = k_x \cdot h$

onde, 
$$k_x = \frac{1}{\frac{\sigma_{rf}}{1 + \frac{2\alpha Z_m \sigma_R}{\sigma_{rf}}}}$$

a porcentagem de aço sendo:

$$\mu = \frac{50 \cdot k_x^2}{Z \cdot m (1 - k_x)} \text{ e } Z = \frac{F}{2\alpha (1 - \beta)}$$

Nestas condições, o valor da resultante de compressão será:

$$C = \alpha \cdot k_x \cdot b \cdot d \cdot \sigma_R$$

o centro de compressão estará a  $\gamma k_x \cdot h$ . Nas expressões acima:

$m$  = Razão dos módulos de plasticidade do aço e do concreto, na ruptura;

$\beta$  = relação de protensão  $\frac{\sigma_{fP}}{\sigma_{fR}}$

$F$  = razão entre a deformação média junto à armadura de tração e a máxima deformação no concreto que a envolve, esta ocorrendo quando a tensão passa de  $\sigma_{Pf}$  para  $\sigma_{rf}$  (em vigas com ancoragens de extremidade).

$\sigma_{rf}$  = tensão convencional de ruptura (inferior em 0,2% da tensão de ruptura) do aço.

$\alpha$  = 0,5 para o cálculo usual e cargas de trabalho;  
= 1.0 para carga limite (conf. Whitney).

= 0,8, valor médio para o cálculo corrente de momento de ruptura.

$\gamma$  = variável de 0,33 a 0,50 e, com um valor médio razoável de 0,40 a 0,45.

$\beta_{\min}$  = 0,0 para o concreto armado.

$\beta$  = 0,4 para concreto protendido com baixa protensão; e 0,8 com alta protensão(\*).

$F_{\max}$  = 1,0 para vigas protendidas, aderidas, sem escorregamento.

$F_{\min}$  = 0,1 para vigas protendidas, não aderidas, com protensão posterior.

Valores intermediários para  $F$  são fixados de acôrdo com o índice de aderência a ser obtido, por injeção nas vigas post-tendidas.

Pela representação gráfica dos valores  $K_x = f(\mu)$  para vários valores de  $Z_m$ , Baker obtêve um grupo de curvas do tipo das da fig. 36, na qual em correspondência a dado  $Z_m$  obtêm-se, por leitura direta, o valor de  $k_x$  da ruptura.

De um modo geral, o efeito da protensão é o abaixamento da linha neutra, o que equivale a um aumento de  $\beta$  e, conseqüentemente de  $Z_m$  e  $k_x$ . Desta forma, um valor baixo de  $F$  implicará no levantamento da linha neutra. Do que se conclúe que é importante que se tenha efetiva aderência e alto grau de protensão, quando o valor de  $\sigma_{rf}$  é alto e, portanto, a porcentagem de aço é baixa.

(\*) A relação de protensão, até agora utilizada no Brasil, varia entre 0,65 e 0,70.

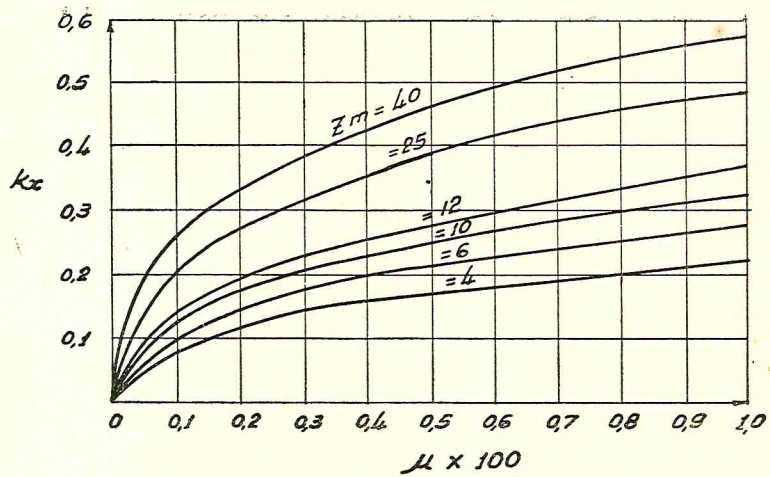


FIG. 36

No caso particular de secção retangular que rompe por esmagamento do concreto, o momento de ruptura será:

$$M_R = \alpha \cdot k_x \cdot b \cdot h^2 (1 - \gamma k_x) \sigma_R$$

### 2.2.2.7. Método de Langendonck

Na sua obra <sup>(30)</sup>, Langendonck estende às peças protendidas o seu método de cálculo das secções de concreto armado a ruptura.

Admitindo o diagrama retangular de tensões na zona comprimida, classifica as peças em sub-armadas e super-armadas, conforme o aço atinja ou não a sua máxima tensão na ruptura.

O método consiste em considerar o alongamento inicial e da armadura:

$$\epsilon^* = \epsilon_e - \epsilon_{aa}$$

Tomando-se a distância básica  $x_e$  (fig. 37), para cima da linha neutra, até o ponto onde  $\epsilon = \epsilon_e$ , no diagrama de deformações:

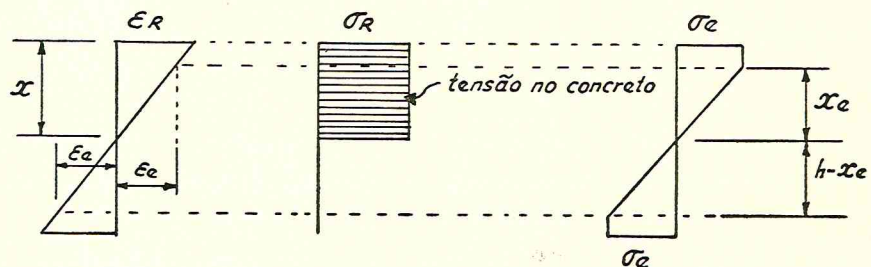


FIG. 37

$$x_e = \frac{x \cdot \epsilon_e}{\epsilon_R}, \text{ para concreto armado, transforma-se em}$$

$$x_e = x \cdot \frac{\epsilon_e + \epsilon_{aa'}}{\epsilon_R} \quad (1), \text{ para a zona comprimida e,}$$

$$x_e = x \cdot \frac{\epsilon_e - \epsilon_{aa'}}{\epsilon_R} = x \cdot \frac{\epsilon^*}{\epsilon_R}, \text{ para a zona tracionada(2).}$$

A condição (1), com  $\epsilon_e + \epsilon_{aa'} > \epsilon_R$  indicará não haver escoamento de armadura nesta zona porque  $x_e > x$ .

Para  $h - x_e > x \cdot \frac{\epsilon^*}{\epsilon_R}$ , a peça será sub-armada, isto é, a armadura escoará;

para  $h - x_e < x \cdot \frac{\epsilon^*}{\epsilon_R}$ , a peça será super-armada.

Nota-se que a única diferença entre as peças protendidas e as não-protendidas é a relativa à fixação do valor  $x_e$ .

No caso corrente, da armadura simples protendida, sendo  $S_u$  a área da zona comprimida, o binário será constituído pelas forças:

$$S_u \cdot \sigma_R = S_{fp} \cdot \sigma_f$$

Donde o momento de ruptura:

$$M_R = S_u \cdot \sigma_R (h - x_u) = S_{fp} \cdot \sigma_f \cdot (h - x_u)$$

No caso em que  $\sigma_f = \sigma_e$  (peça sub-armada),  $S_u = \frac{\sigma_e}{\sigma_R} \cdot S_{fp}$  e a posição da

linha neutra — como no caso das peças de concreto armado — independe do valor do encurtamento de ruptura, e conseqüentemente, da protensão; caso contrário, será necessário considerar o efeito da protensão, o que consiste na correção do valor de  $\epsilon$ .

O valor de  $x_u$  será dado por  $\frac{\epsilon_R}{\epsilon_R + \epsilon^*}$ , donde se determina  $\sigma_f$  e, conseqüentemente,  $M_R$ .

### 2.2.2.9. Método de Ramaswamy e Narayana

Os autores <sup>(31)</sup> desenvolvem uma fórmula direta que fornece os valores de momento de ruptura em peças de concreto protendido. Restringem-na, todavia, às peças com protensão posterior.

Em função da porcentagem de armadura, as vigas são classificadas em sub-armadas, super-armadas, e balanceadas.

Admitem que a tensão média na zona comprimida seja de  $0.50 \sigma_{cúb}$  (no caso da ruptura envolver o esmagamento do concreto). A posição do centro da área comprimida em  $0,4 k_x \cdot h$ , em tôdas as vigas. A área total de compressão proporciona a força:

$$C = 0,50 \sigma_{cúb} \cdot b \cdot k_x \cdot h$$

Conforme fig. 38, para peças sub-armadas, o momento de ruptura será:  
 $M_r = S_{fp} \cdot \sigma_{rf} \cdot Z = 0,50 \sigma_{cúb} \cdot b \cdot k_x h \cdot Z = S_{fp} \cdot \sigma_{rf} (1 - 0,4 k_x) h \dots$

$$\dots k_x = \frac{S_{fp}}{b \cdot h} \cdot \frac{\sigma_{rf}}{0,5 \sigma_{cúb}}$$

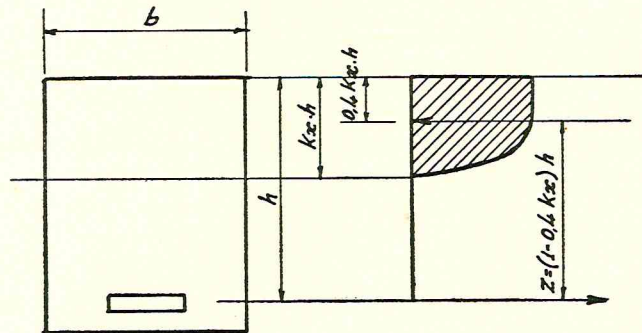


FIG. 38

Para as peças super-armadas, teremos:

$$C = 0,50 \sigma_{cúb} \cdot b \cdot k_x \cdot h$$

e,

$$M_r = S_{fp} \cdot \sigma_f (1 - 0,4 k_x) \cdot h = 0,50 \sigma_{cúb} \cdot b k_x h^2 (1 - 0,4 k_x)$$

ou pondo:

$$\frac{M_r}{\sigma_{cúb} \cdot b d^2} = P$$

$$k_x^2 - 2,5 k_x + 5P = 0$$

cuja solução fornece:

$$k_x = 1,25 - \sqrt{1,5625 - 5P}$$

Na figura 39 é mostrado um processo gráfico de resolução da equação acima.

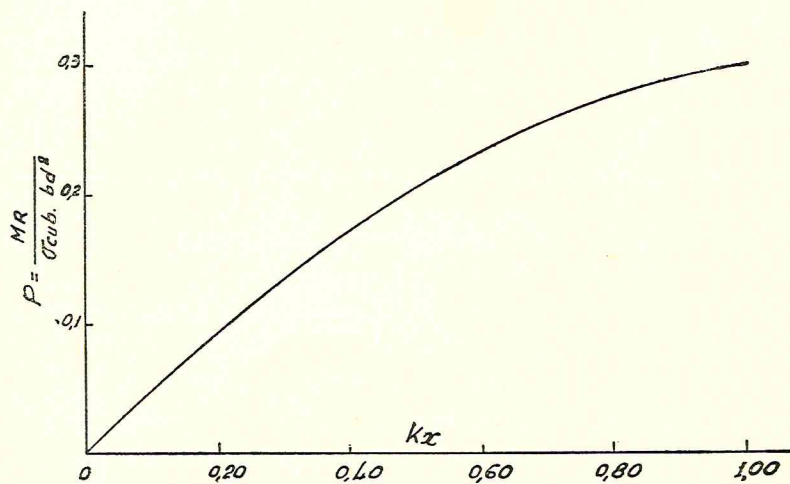


FIG. 39

Em seqüência, os autores analisam o funcionamento das vigas de concreto protendido, sob o ponto de vista da resistência limite, considerando como os mais importantes os seguintes elementos:

— a porcentagem de aço  $\mu$ ; a tensão de ruptura do aço  $\sigma_{rf}$ ; a resistência cúbica do concreto,  $\sigma_{cúb}$ ; o grau de protensão e a eficiência da aderência. Admitindo, entretanto, a não tão grande importância destas duas últimas, e introduzindo um parâmetro  $\lambda = \frac{S_f \cdot \sigma_{rf}}{\sigma_{cúb} \cdot b \cdot h}$ , estudam a variação de  $M_r$  baseados

na variação de  $\lambda$ .

Face a resultados experimentais, julgaram mais conveniente estabelecer uma relação  $k_z = f(\lambda)$  e, através do método dos mínimos quadrados chegaram a que  $k_z = e^{-0,771\lambda}$ , é a expressão mais satisfatória para o problema. Na figura 40, está representada a linha reta correspondente: os valores de  $k_z$  foram obtidos

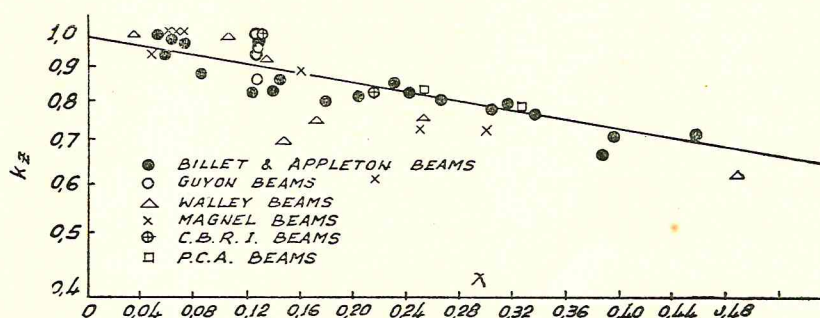


FIG. 40

de  $k_z = \frac{M_r}{S_f \cdot \sigma_{rf} \cdot h}$ , para as vigas que romperam pela armadura e de

$k_z = \frac{M_r}{0,50 \sigma_{cúb} \cdot b h^2 k_x}$  para peças super-armadas, obtidos analiticamente ou pelo gráfico da fig. 39.

Pela aplicação do que precede, às vigas sub-armadas resulta:  $M_r = S_f \cdot \sigma_{rf} \cdot h \cdot e^{-0,771\lambda}$ ; desenvolvendo em série  $e^{-0,771\lambda}$  e desprezando os termos de segunda ordem, vem:

$$M_r = S_f \cdot \sigma_{rf} \cdot h (1 - 0,771\lambda) = S_f \cdot \sigma_{rf} \cdot h \left( 1 - 0,771 \cdot \frac{S_f \cdot \sigma_{rf}}{\sigma_{cúb} \cdot b h} \right)$$

Analogamente, para as vigas super-armadas:

$$M_r = 0,50 \cdot \sigma_{cúb} \cdot b \cdot k_x \cdot h^2 k_z = 0,5 \sigma_{cúb} \cdot b h^2 \left( \frac{1 - k_z}{0,4} \right) k_z = 1,25 b h^2 \cdot e^{-0,771\lambda} \times (1 - e^{-0,771\lambda})$$

Pondo  $0,771 = k_1$  e desenvolvendo:

$$M_u = 1,25 \sigma_{cúb} \cdot b \cdot h^2 \left( k_1 \cdot h - \frac{3k_1^2 \cdot \lambda^2}{2!} + \frac{7k_1^3 \cdot \lambda^3}{3!} \right)$$



Nas considerações de ordem prática, o valor de  $\lambda$  só raramente excede 0,5. Assim:

$$M_r = 0,272 \sigma_{cub} . b h^2$$

ou

$$M_r = 0,340 \sigma_{c28} . b h^2$$

### 2.2.2.10. Outros métodos.

Além dos métodos relacionados nos itens precedentes, e dentre inúmeros outros, cabe destacar os seguintes:

#### a) Método de Weber <sup>(32)</sup>

Consiste — pura e simplesmente — na extensão ao concreto protendido, da mais simples concepção que se possa aplicar ao concreto armado.

Procura-se o centro de gravidade da secção fissurada e, admitindo-se a hipótese da conservação das secções planas e a perfeita elasticidade dos materiais, faz-se girar o diagrama de tensões em torno do centro de gravidade, até que seja atingido, em um ponto, o limite de resistência do material. Mistér se faz ressaltar que, este método é extremamente sumário — seja no que diz respeito ao estudo das propriedades dos materiais, seja quanto ao estudo das condições de equilíbrio.

#### b) Método de Colonnetti <sup>(33)</sup>

O processo de Colonnetti, da mesma forma que o de Weber, baseia-se na hipótese de validade das leis de Hooke e de Navier até a ruptura. O que distingue fundamentalmente o método, é que a posição da linha neutra é estabelecida de acordo com as leis de equilíbrio, isto é, a igualdade dos esforços de tração e compressão. Por outro lado, já estabelece a distinção das rupturas por insuficiência de armadura e por insuficiência do concreto; entretanto, conforme comprova a experiência, contra o método objeta-se que, adotando a lei de Hooke, conduz a carga de ruptura à dependência das tensões prévias e isto, de maneira muito mais acentuada do que se constata na realidade.

#### c) Método de Billig <sup>(34)</sup>

Kurt Billig dá, em sua obra, um método de correlação de diagramas tensão-deformação, de grande aplicação em peças submetidas a protensão uniforme (Perfís Billig). O método é, dentro de certas limitações, aplicável às estruturas em geral, mas não apresenta nenhuma particularidade especial.

#### d) Método da U.R.S.S.

(A. A. Gvozdev, S. A. Dmitriev, B. A. Kalataourov e V. V. Mikhailov).

— Segundo divulgações recentes, <sup>(35)</sup> o cálculo é feito semelhantemente ao concreto armado, o diagrama comprimido com tensões uniformes. Considerações são feitas nas peças super-armadas, relativas às deformações devidas à protensão. Da análise do método, chegam-se as expressões idênticas às que são obtidas pelo método de LANGENDONCK (2.2.2.8).

### 2.2.3. Considerações gerais sobre os métodos expostos.

Os vários autores relacionados admitem, em comum, a conservação da secção plana até a ruptura.

Para as peças sub-armadas, também é unânime o ponto de vista de que a ruptura se dá como no concreto armado. Já para as peças super-armadas, como

o valor controlador da posição da linha neutra é o encurtamento de ruptura, e como a protensão provoca uma modificação nas condições iniciais de deformação do aço e do concreto, a sua influência é considerada pela maioria dos autores citados.

Concordamos com a opinião de Rüsçh:

Muitos pesquisadores, por entenderem de caráter problemático o cálculo do momento de ruptura, na flexão, utilizam para a sua obtenção fórmulas que consideram, tão somente, o equilíbrio das forças atuantes na secção, sem a consideração das correspondentes deformações. Não nos parece, em definitivo, correto, tal procedimento. Entendemos axiomático o fato de que o concreto protendido tem sua base — verdadeira razão de ser — em condições iniciais de prédeformação do aço. Fora de dúvida que, somente em peças com baixa porcentagem de armadura, tais hipóteses — e conseqüentes fórmulas — podem ser válidas.

Graças aos estudos de Hognestad<sup>(36)</sup>, Moenaert<sup>(37)</sup>, e Rüsçh<sup>(38)</sup> e, particularmente àquêles levados a cabo pelo Comitê Europeu de Concreto, já se estabelece quasi que uma unificação dos métodos, empregando fórmulas adimensionais, definindo-se a possibilidade de obtenção de valores limites do momento fletor, para qualquer porcentagem de armadura, plenamente concordantes com os resultados experimentais.

A divergência mais importante entre os diferentes critérios, sobre a grandeza e distribuição das deformações resulta, fundamentalmente, da hipótese errônea de que a deformação máxima do concreto — na fase final de ruptura — adquire um valor constante.

Rüsçh, em recente trabalho<sup>(39)</sup>, demonstra que o valor da deformação na fibra extrema, por ocasião da ruptura, é uma variável que depende não somente da posição da linha neutra, senão também — e principalmente — da forma da secção. A lei tensão-deformação do concreto (fig. 41) reproduz-se, em toda a sua extensão, na ruptura por flexão, até alcançar a deformação crítica, que conduz ao máximo momento de ruptura.

Dependendo da posição da linha neutra, a deformação na fibra extrema, assumirá valores diversos.

Na fig. 41 observam-se os diferentes resultados obtidos para a deformação na fibra extrema, em conseqüência da variação da secção e, evidentemente, acarretando o deslocamento da linha neutra. Além disso, pode-se observar, também, que a deformação máxima bem como a distribuição de tensões apresentam diferentes formas e valores, para os diferentes casos.

#### 2.2.4. CONCLUSÕES

Da análise dos numerosos métodos, baseados na teoria da plasticidade, para o cálculo do momento de ruptura nas peças de concreto protendido, alguns dos quais — os mais representativos, pelo menos — foram comentados nesta parte, entendemos vantajosa, para efeitos de aplicação prática, a marcha que a seguir se propõe:

##### I) Peças sub-armadas:

A serem consideradas como as peças de concreto armado.

Embora o valor limite do momento dependa pouco da configuração do diagrama de tensões da zona comprimida, somos de opinião que deve ser observada, para o mesmo, uma curva afim do diagrama tensão-deformação, obtida de ensaios em corpos de prova prismáticos, de secção transversal semelhante à secção adotada.

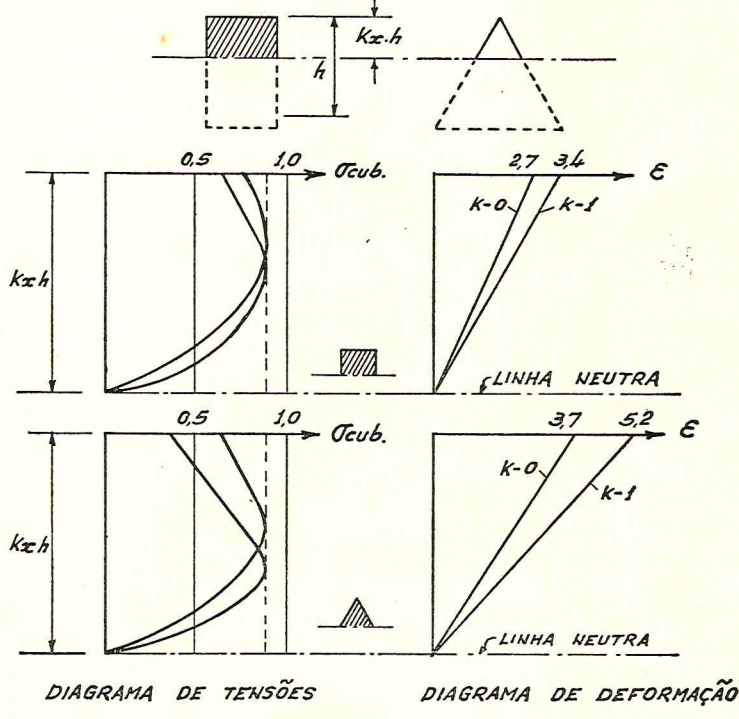
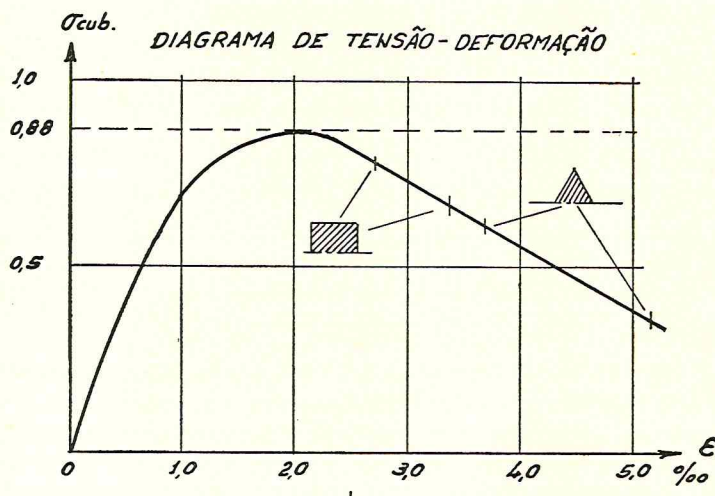


FIG. 41

No caso de, por uma razão ou outra, adotar-se o diagrama retangular, uma consideração fundamental deve ser levada à devida conta qual seja, a da obtenção do braço de alavanca,  $Z$ .

Sendo, neste caso, o valor de  $\sigma_R$  constante, o centro de compressão cairá em posição diversa daquela do diagrama real.

Para ilustrar, numa secção retangular, a distribuição retangular de tensões levaria a  $\beta = 0,50$  quando, na realidade,  $\beta = 0,40$  (Rüsch). Assim, repetimos, o diagrama retangular de tensões, se adotado, deverá ser traçado de modo a conduzir a valores de  $Z$  o mais próximo possível dos resultados de ensaios.

## II) Peças super-armadas:

Também neste caso, a distribuição de tensões no bloco comprimido será de conformação idêntica à do diagrama tensão-deformação do concreto e, considerando-se a importância da mesma no valor limite do momento, sem concessões a outra qualquer configuração de diagrama.

De acôrdo com a forma da secção, é obtida a deformação e correspondente tensão na fibra extrema, por ocasião da ruptura. Fixados êstes valores decorre, de imediato, a posição da linha neutra e, conseqüentemente, a posição da resultante de compressão (consideradas, no diagrama do aço, as deformações iniciais de protensão e respectiva tensão), de modo que finalmente, obtêm-se o momento de ruptura.

### 3 — PLASTICIDADE DAS ESTRUTURAS PROTENDIDAS

#### 3.1. Estruturas em aço.

##### 3.1.1. Generalidades.

Foi visto, anteriormente (2.1.), o comportamento das secções em aço doce, submetidas a protensão com cabo.

Estudaremos, a seguir, o comportamento de conjunto da estrutura, com a formação de rótulas plásticas e conseqüente estabelecimento do mecanismo, o qual acarretará a ruptura.

##### 3.1.2. Protensão excêntrica.

Não obstante o emprêgo, já bastante difundido, da protensão axial em estruturas simultâneamente sujeitas a tração e flexão (banzos inferiores de vigas Vierendeel, por ex.), não comentaremos, neste trabalho, tal aspecto, por entendermos que lhe excede ao âmbito.

Analizemos, de modo geral, o comportamento de uma viga contínua de dois vãos. (O comportamento de estruturas mais complexas seria méra extensão do que vamos expor).

a) Caso elementar, do tirante paralelo a fibra inferior. (fig. 42).

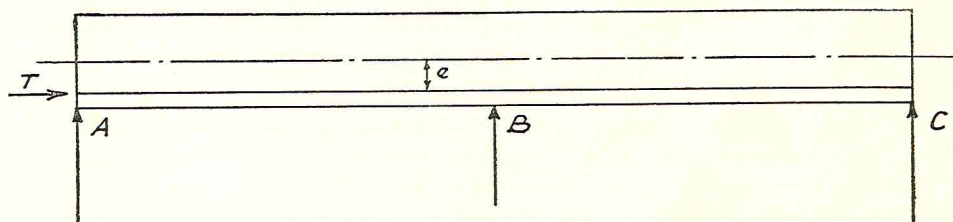


FIG. 42

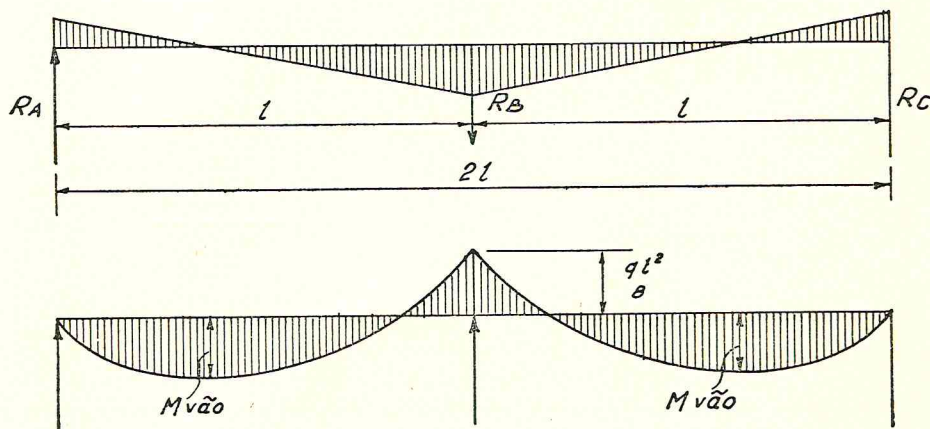


FIG. 43

Evidentemente, a aplicação do esforço no tirante, irá acarretar o aparecimento de momentos fletores em toda a estrutura. A tendência, no ponto B será então, a de um "arrancamento" o que, se não acontece, é em razão da fixação do mesmo e, em virtude do que, aparecerá aí um momento (positivo). Para equilibrar a reação em B ( $R_B$ ) despertar-se-ão reações em A ( $R_A$ ) e em C ( $R_C$ ). A fig. 43 dá o aspecto do diagrama dos momentos fletores resultante:

As reações em A e C, serão:

$$R_A = R_C = \frac{1,5M}{l}$$

e em B,  $R_B = -\frac{3M}{l}$  sendo M o momento decorrente da excentricidade do cabo ( $M = T \cdot e$ ).

Assim: 
$$M_B = \frac{1,5M}{l} \times l - M = 0,5M$$

Admitindo, a título ilustrativo, o carregamento exterior simultâneo nos dois vãos, despertar-se-ão momentos que serão adicionados aos da protensão.

Entretanto, como o cabo acompanha a deformação global da peça, segue-se que êle experimentará uma variação de deformação e, conseqüentemente, modificação no seu estado reativo. O diagrama de protensão estará, pois, alterado proporcionalmente.

Na fase elástica existe uma perfeita correlação entre o aumento de carga e o aumento de tensão no tirante e, conseqüentemente, os dois diagramas a serem superpostos serão alterados; o desenvolvimento das tensões no cabo, respectivo estado reativo e distribuição das tensões no perfil, ocorrem de maneira semelhante àquela descrita em 2.1.2.

No estágio plástico, todavia, teríamos a conformação de diagramas e elementos correlatos conforme a fig. 44. Se a estrutura não fôsse protendida, certamente ocorreria em primeiro lugar a plastificação da secção de apoio e, posteriormente, as correspondentes aos máximos de vão.

A protensão, não obstante, pode alterar esta condição, ou proporcionando a plastificação da secção do meio do vão em primeiro lugar ou, simultaneamente, as do vão e apoio(\*).

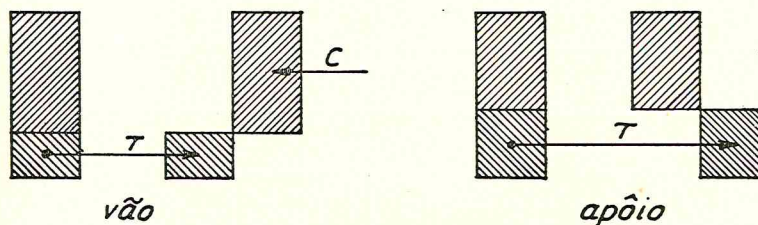


FIG. 44

No caso em tela admitamos, como seria desejável, que a plastificação se dê, primeiramente, no apoio central. Nesta ocasião, tanto os vãos como os cabos se comportam elásticamente.

(x) Observação importante é a de que a formação simultânea de rótulas nos dois vãos, independentemente de formação de rótula no apoio (nas vigas de 2 vãos, não protendidas) gera um mecanismo.

Prosseguindo no carregamento, prosseguirá a deformação nos vãos. Esta, porém, acompanhada da deformação no cabo, implicará no aumento da tensão deste e, ipso-fato, no seu efeito reativo, pela variação do qual será provocada uma alteração nas condições de plastificação, permitindo maior rotação, e — pôsto que a posição do cabo, paralela à fibra inferior em relação ao apôio, não seja adequada — reduzindo o valor do momento de plastificação.

De outro lado, no vão, o cabo sustentará a secção, e podemos dizer que a formação do mecanismo somente ocorrerá com a plastificação simultânea do apôio, da secção do vão e do cabo.

Como se observa na fig. 44, enquanto no vão o momento de plastificação é substancialmente aumentado, pela presença do cabo, no apôio êle será reduzido.

#### b) Caso do tirante não paralelo à fibra inferior.

Conforme vimos anteriormente, a conformação paralela do cabo não é conveniente. Na fig. 45 indica-se uma conformação adequada do cabo, o qual, nos extremos A e C coincide com o baricentro da secção; na secção de máximo esforço, no vão, com o ponto inferior; e no apôio, com o ponto superior.

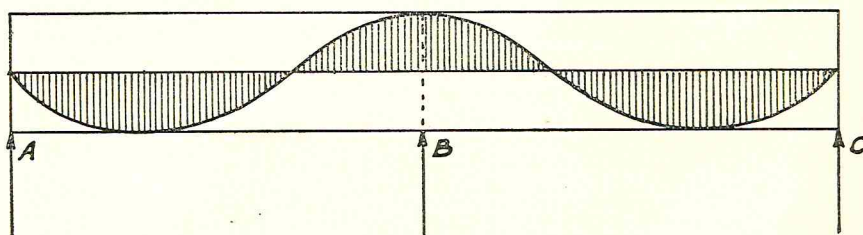


FIG. 45

A obtenção dos hiperestáticos, na fase elástica, será feita mediante qualquer processo usual; nesta fase, a disposição do cabo pode regular os valores máximos (positivos e negativos) de modo a se conseguir um aproveitamento racional do perfil, inclusive para proporcionar iguais momentos fletores máximos, no apôio e no vão (situação para a qual, vão e apôio apresentariam plastificação total simultânea, numa fase mais adiantada).

Da mesma forma que no caso anterior, a formação do mecanismo estaria condicionada à plastificação do cabo; agora, no entanto, a disposição apropriada do cabo, no apôio e vão, possibilitaria o aproveitamento integral do material. Como se observa na fig. 46.

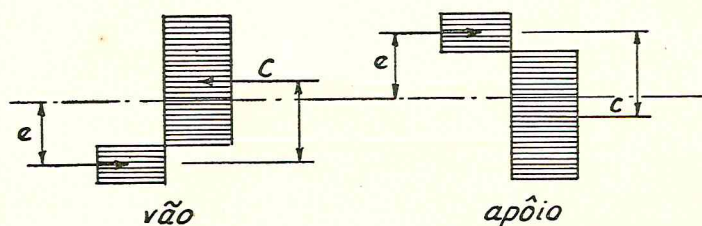


FIG. 46

$$C = T = S_f^* \sigma_e^* + S_{ft} \cdot \sigma_e = S_{fc} \cdot \sigma_e$$

$$\left. \begin{aligned} S_f &= S_{ft} + S_{fc} \\ S_f^* \cdot \frac{\sigma_e^*}{\sigma_e} &= S_{fc} - S_{fc} \end{aligned} \right\} S_{fc} = \frac{1}{2} \left( S_f + S_f^* \cdot \frac{\sigma_e^*}{\sigma_e} \right)$$

Para o caso particular da secção simétrica, teremos o caso de plastificação com carga excêntrica:

$$M_{\text{plast.}} = 2 \cdot \sigma_e \cdot y_t \cdot S_1 + N \cdot e$$

$$\left. \begin{aligned} N &= S_f^* \cdot \sigma_e^* \\ S_1 &= S_t \end{aligned} \right\} M_{\text{plast.}} = 2 \cdot \sigma_e \cdot y_t \cdot S_t + S_f^* \cdot \sigma_e^* \cdot e$$

No caso corrente de perfis laminados, a área  $S_2$  referida em 1.1.1., correspondente a  $S_2 = S_f^* \cdot \frac{\sigma_e^*}{\sigma_e}$ , diz respeito a um trecho de alma de espessura  $t$  e altura variável  $h_1$  (fig. 47).

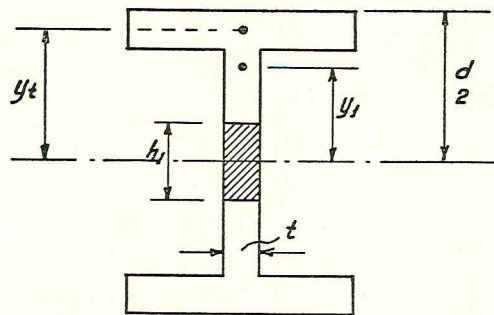


FIG. 47

As tabelas mais recentes de perfis já fornecem o fator de forma da secção

$$f = \frac{W_p}{W_e}$$

Sendo:  $W_p = 2 \cdot \frac{S}{2} \cdot y_1 = S \cdot y_1$  resulta,  $y_1 = \frac{W_p}{S}$  e,

$$y_t = \frac{\frac{S}{2} \cdot y_1 - t \cdot \frac{h_1}{2} \cdot \frac{h_1}{4}}{S_t} = \frac{0,5W_p - 0,125th_1^2}{S_t}$$

Lembrando que:

$$S_t = \frac{1}{2} \left( S - S_f^* \cdot \frac{\sigma_e^*}{\sigma_e} \right)$$



$$t \cdot h = S_f \cdot \frac{\sigma_e^*}{\sigma_e} \dots h = \frac{S_f \cdot \sigma_e^*}{t \cdot \sigma_e}$$

$$y_t = \frac{0.5 W_p - 0.125 \left( S_f \cdot \frac{\sigma_e^*}{\sigma_e} \right) \cdot \frac{1}{t}}{0.5 \left( S_f - S_f \cdot \frac{\sigma_e^*}{\sigma_e} \right)}$$

e finalmente:

$$M_{\text{plast}} = 2 \cdot \sigma_e \cdot S_t \cdot y_t + N \cdot e = W_p \cdot \sigma_e + S_f \cdot \sigma_e^* \left( e - 0.25 \frac{S_f \cdot \sigma_e^*}{t \cdot \sigma_e} \right)$$

expressão que se torna máxima para

$$S_f \cdot \sigma_e^* = 2 \cdot t \cdot \sigma_e \cdot e$$

Evidentemente, êste máximo só é aplicável até o limite de excentricidade  $\frac{d}{2}$  porque, caso contrário teríamos, ainda a plastificação em compressão da

mesa inferior (ou superior, no apôio), e o limite teórico seria  $S_f \cdot \frac{\sigma_e^*}{\sigma_e} = S_{\text{perfil}}$  que, como vimos, é impraticável.

### 3.1.3. CONCLUSÕES(\*)

Uma das poucas, porém sérias, objeções que se opõem ao cálculo plástico das estruturas metálicas é a de que apresentam grandes deformações; e isto porque, conforme as circunstâncias, sendo realizado um sub-dimensionamento (elástico) do apôio, por exemplo, com um carregamento muito inferior ao carregamento de ruína (eventualmente, ainda menor que o carregamento de serviço) são ultrapassados os limites elásticos das secções — com possibilidade, inclusive, de formação de rótula plástica, em serviço e crescimento de deformações desproporcionalmente ao crescimento do carregamento.

Não obstante, e como se viu, as deflexões só se apresentam acentuadamente quando tôda a área estiver plastificada (rótula), situação que — no caso da aplicação do cabo protendido — só ocorre no instante da formação do mecanismo, já que o tirante se manterá elástico até à fase final.

Da análise a que procedemos, fica claro que:

- a) O crescimento de tensões no cabo é inferior ao do perfil.
- b) A plastificação do cabo é posterior à do perfil.

Além do que, é possível, pelo emprêgo adequado da protensão, conduzir vãos e apôio à plastificação simultânea, o que conduzirá a um comportamento, na ruptura, mais proporcionado ao que se teria no regime elástico.

Outro aspecto importante a observar é que, nas estruturas hiperestáticas a relação entre a carga de ruptura e a carga de serviço (mantidas iguais condi-

(\*) Caberia, neste item, a discussão do caso da plastificação, por momento negativo, no vão descarregado. Deixamos, todavia, de examinar tal caso com maiores detalhes eis que, facilmente se demonstra que o mesmo somente ocorreria para porcentagens da armadura de protensão da ordem de uns 8% — condições em que, a não ser excepcionalmente — constituir-se-ia de maior interesse.

ções no regime elástico), é muito maior que nas isostáticas. Isto se deve principalmente, a dois fatos:

- a) A formação do mecanismo exige o aparecimento de maior número de rótulas plásticas. (A formação de mecanismo, exige o aparecimento de rótulas plásticas em número superior ao número de constrangimentos hiperestáticos que a estrutura ou parte dela apresentem).
- b) O dimensionamento é conduzido pela hipótese de envoltória, ou seja, a pesquisa dos máximos momentos, de apóio e de vão, é desenvolvida mediante análise das hipóteses de carregamento, separadamente. Os máximos valores de apóio e de vão não ocorrem simultâneamente: Ora bem, se conduzirmos apóio e vão, ao mesmo tempo, à plastificação, numa mesma hipótese — a mais desfavorável — tal obstáculo desaparece, automàticamente.

Em resumo: a protensão adequadamente empregada, possibilita a aplicação racional das estruturas metálicas. Na realidade, o emprêgo adicional de cabos de protensão, além de limitar as deformações nas gamas elástica e plástica, ainda exige — para a formação do mecanismo — que o tirante atinja o seu limite de elasticidade — o que equivale a introdução de um novo vínculo. Conseqüentemente, aumentando consideravelmente a capacidade portante da estrutura.

## 3.2. ESTRUTURAS EM CONCRETO PROTENDIDO

### 3.2.1. Generalidades

Foi já visto, no decurso dêste trabalho, o comportamento das secções e peças simples em concreto protendido (2.3). Examinaremos, a seguir, o comportamento da estrutura face à carga crescente, que tende para o seu valor limite.

Conforme o já exposto, a formação da rótula plástica, nas peças de concreto armado, condiciona a secção a determinada rotação, cuja condição de compatibilidade é, neste material, de transcendental importância. Estabeleceremos as limitações a serem impostas no caso da aplicação da protensão.

### 3.2.2. Protensão excêntrica

Válido aqui, o estabelecido em 3.1.2. sobre o emprêgo da protensão axial, e acrescido o caso corrente de estacas pré-moldadas, limitar-nos-emos ao exame da protensão excêntrica.

Se, para as estruturas metálicas protendidas, a influência da conformação do cabo é manifesta no incremento de tensões, em virtude da inexistência da aderência; nas estruturas de concreto protendido com aderência (inicial ou posteriormente desenvolvida), o crescimento de tensões dar-se-á de maneira semelhante à do concreto armado, isto é, dentro do princípio de igualdade de deformações, em cada ponto, na peça e no cabo.

Analogamente ao que se viu em 3.1.2, se o cabo for paralelo ao banzo, as vantagens da protensão são reduzidas. Inclusive, aqui, pelo estado débil da fibra superior no apóio, a desvantagem de uma ruptura precipitada pela inconveniente posição da armadura.

A menos que o cabo seja concordante, sua protensão despertará uma reação central  $R_B$  e extremas  $R_A$  e  $R_C$ . Nestas condições, a protensão acarretará um diagrama adicional de fletores (hiperestáticos de protensão), cujo máximo valor no apóio central é  $R_A \cdot l$ . No caso de viga simétrica,  $R_A = \frac{R_B}{2}$  e,  $M = \frac{R_B \cdot l}{2}$ .

Nos vãos, a aplicação dos isostáticos decorrentes de esforços no cabo, proporcionaria os fletores respectivos. Aqui, o comportamento elástico dos fios, permite-nos o emprêgo dos métodos clássicos de cálculo (elásticos). (fig. 48)

Seja, agora, um vão intermediário de viga contínua (fig. 49) carregada uniformemente. Considerando o semi-vão e tomando momentos em relação ao apoio esquerdo, teremos:

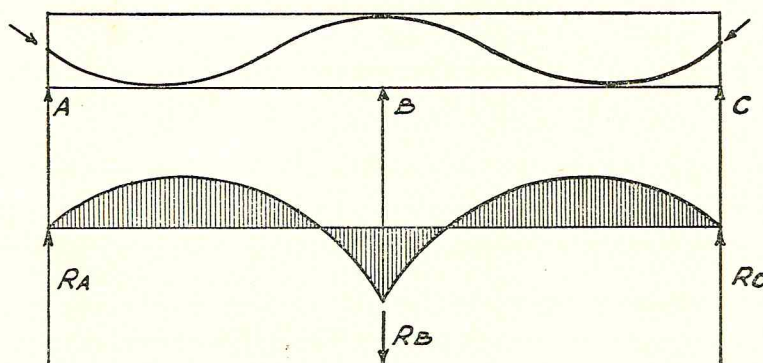


FIG. 48

$$\frac{q \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} = 2 \cdot T' \cdot Z \dots q = \frac{16 T' \cdot Z}{l^2}$$

valor que é o dobro do obtido para uma viga simplesmente apoiada (com efeito, nesta sendo nulos os momentos de apoio, a resultante é coincidente com T).

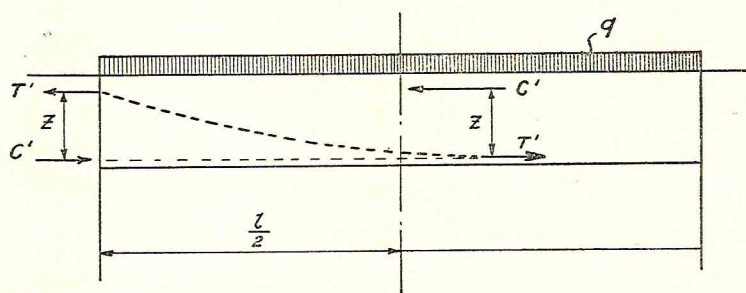


FIG. 49

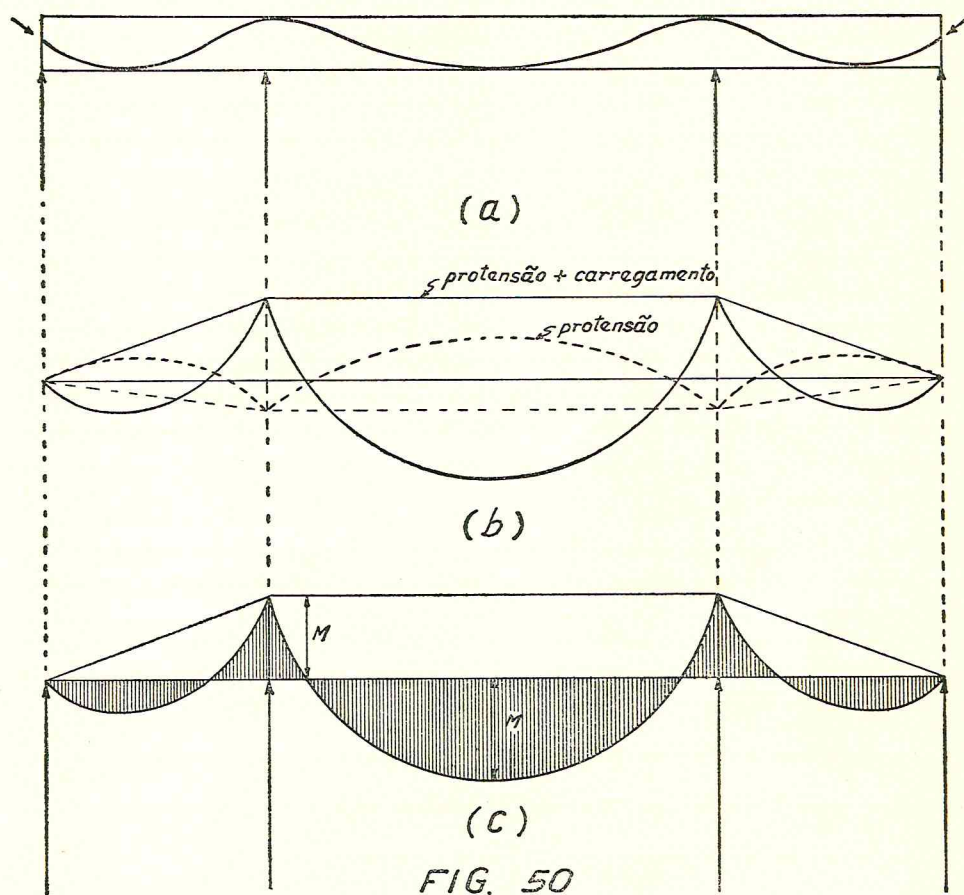
Mediante tão simples exemplo — não obstante não ser regra geral — já se pode notar que a capacidade de carga foi duplicada, na peça contínua.

Vejamos, por outro lado, o caso da fig. 50 (a) em que o vão central é bastante maior que os extremos:

Admitindo que o cabo atravessasse a viga de extremo a extremo, que a secção seja simétrica e que a excentricidade seja igual (numéricamente, e inversa quanto ao sentido), no apoio e no vão, teríamos o diagrama elástico de fletores

da fig. 50 (b), e na ruptura, com o crescimento da carga aplicada, o da fig. 50 (c), com momentos iguais no apoio e no vão.

Em seqüência detalhada teríamos:



1) Aplicação simultânea da carga permanente e da protensão, com aparecimento de esforços elásticos;

Dêstes esforços, e de acôrdo com a teoria da Elasticidade resultariam tensões de compressão em tôda a área da secção (eventualmente, baixos valores de tração no bordo oposto aos cabos de protensão).

2) Com o crescimento da carga exterior manifestam-se fletores adicionais em tôda a estrutura, cujo crescimento é proporcional ao da carga (os fletores já existentes, inclusive os da protensão, não guardam relação de proporcionalidade com os da carga exterior).

3) Attingido o momento limite elástico, e posteriormente o momento de plastificação total na secção de apoio, êste se comportará como rótula plástica.

4) Finalmente, com a plastificação do vão é estabelecido o mecanismo, acarretando a ruína da estrutura.

Cabe notar aqui, uma diferença fundamental, com as estruturas metálicas protendidas. Nestas, a resistência do aço a tração impede a formação do mecanismo, embora se tenha no perfil três secções plastificadas determinantes, porque o cabo, como elemento adicional, sustenta a estrutura. Nas estruturas de concreto protendido, com o incremento da carga, atinge-se a fissuração quando o binário resistente é constituído apenas pelo elemento de tração (cabo) e pelo concreto comprimido. A secção de concreto, por si só, não suportaria incremento nenhum de carga e seu comportamento, de maneira nenhuma, poder-se-ia equiparar ao de uma rótula plástica; não obstante, poderia ser admitida como uma rótula real (articulação) onde os momentos fôssem nulos. Entretanto, o equilíbrio é mantido pela presença do aço (cabo).

Como se vê, o comportamento estrutural do concreto protendido no estágio limite, é semelhante ao do concreto armado. Todavia, se para as peças simples foi observado que, apenas para as secções super-armadas, a influência inicial da protensão se fazia sentir de maneira acentuada na rutura, aqui tal influência representa algo mais. Conforme se verá, a condição fundamental para que ocorram tôdas as rótulas necessárias ao estabelecimento do mecanismo é que a formação da  $n$ -ésima rótula necessária não exija deformações que qualquer das existentes não possam suportar.

O problema da capacidade de rotação da rótula plástica no concreto tem sido exaustivamente estudado por vários autores, destacadamente — ainda uma vez — os trabalhos de A. L. L. Baker e os de Hognestad, entre outros.

O valor determinante para regular a rotação da rótula é o encurtamento da fibra mais comprimida da secção, por ocasião da ruptura(\*).

Geralmente, classificam-se as rótulas plásticas no concreto em:

- a) **Rótulas de tração** — Nas quais a linha neutra cai dentro da secção.
- b) **Rótulas de compressão** — No caso contrário.

Ocupar-nos-emos, apenas, das do tipo *a*) as quais, com efeito, constituem a grande maioria nas estruturas de concreto protendido.

Várias expressões têm sido propostas para o cálculo da declividade. Dentre tôdas, cremos a mais representativa a de A. A. L. Baker que demonstrou que a expressão  $\int \frac{Mds}{E.J}$ , da fase elástica pode ser estendida à plástica, desde que se empreguem valores adequados para (E.J.). A propósito, examinemos os valores da rotação para o caso da secção trincada, e na ruptura.

Quando a secção não fôr fissurada, os valores relativos à deformação podem ser calculados assumindo-se o momento de inércia da secção geométrica, eventualmente levando-se em conta a armadura, pela consideração da área de concreto equivalente, ou seja,  $(1 - n)$  vêzes a área da armadura, sendo  $n$  a relação modular . .

(\*) Distinga-se, fundamentalmente, este encurtamento do valor maior que pode ser atingido sob a ação das cargas permanentes (Deformação lenta).

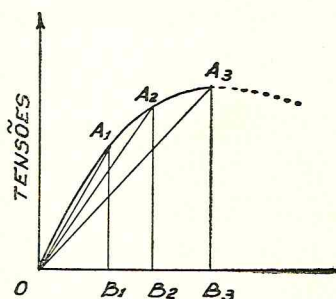
Quando a secção está trincada, melhor será equacionar o problema em termos da relação tensão-deformação do concreto, considerando a deformação na fibra extrema de compressão e distribuição linear de deformações, dentro da zona comprimida. Seja, fig. 51 um pequeno trecho ABCD da zona comprimida de uma viga, sendo  $r$  o raio de curvatura da linha neutra: o encurtamento, na fibra extrema, será:

$$BE = \epsilon \cdot ds$$

Expressa em coordenadas cartesianas, a declividade da linha neutra será

$\frac{dy}{dx}$  e, sua variação,  $\frac{d^2y}{dx^2}$  será o grau de curvatura  $\frac{1}{r}$ . Segue-se então:

DIAGRAMA. TENSÃO DEFORMAÇÃO DO CONCRETO



$$E'_c (\text{elástico}) = \frac{A_1 B_1}{OB_1}$$

$$E'_c (\text{plástico}) = \frac{A_3 B_3}{OB_3}$$

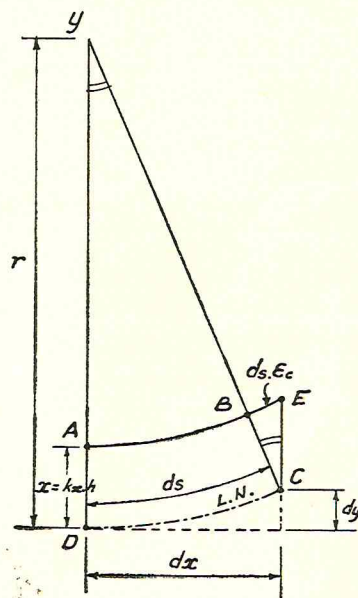


FIG. 51

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{1}{r} \cdot dx = \int \frac{\epsilon_c \cdot dx}{k_x \cdot h} \quad \left( \text{com } ds \sim dx \text{ e } \frac{ds}{r} = \frac{\epsilon_c \cdot ds}{k_x \cdot h} \right)$$

O valor de  $k_x \cdot h$  sendo aproximadamente constante para área de armadura constante, e se admitirmos também constante, o módulo secante do aço, sobre

um trecho qualquer na gama elástica, teremos  $\epsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c}$ ,  $J = \frac{M \cdot k_x \cdot h}{\sigma_c}$  ( $\sigma_c$  sendo

a tensão correspondente a  $M$ ), e a declividade da linha neutra dada por—

$\int \frac{M}{E_c \cdot J}$ , na forma usual. Tal será o efetivo comportamento de uma secção,

para momento não superior ao de uma viga sub-armada, no último estágio de carregamento (quando, no início do escoamento do aço, as tensões ainda per—

maneçem proporcionais às deformações). Assume-se, via de regra que a plastificação começa nesse estágio.

Assim, sendo  $E_c = 500\sigma_{cáb}$ , na gama elástica, o momento:

$$M = \frac{b \cdot k_x \cdot h}{2} \cdot \sigma_c (h - \beta \cdot k_x \cdot h) = \frac{k_x \cdot b h^2}{2} \cdot \sigma_c (1 - \beta \cdot k_x) \text{ e } E_c \cdot J =$$

$$= k_x \cdot \frac{b h^2}{2} \sigma_c (1 - \beta \cdot k_x) \cdot \frac{k_x \cdot h}{\sigma_c} \cdot 500\sigma_{cáb} = 250b \cdot h^3 \cdot \sigma_{cáb} (k_x^2 - \beta \cdot k_x^3)$$

Sobre um trecho no qual  $\epsilon_c$  atingiu seu valor limite:

$$\epsilon'_c = \frac{\sigma'_c}{E'_c}; J' = \frac{M' k_x \cdot h}{c'}; E'_c \cdot J' = 250 \cdot \sigma_{cáb} \cdot b h^3 (k_x^2 - \beta k_x^3),$$

onde a única diferença diz respeito ao valor de  $\beta$  que, no primeiro caso (diagrama triangular) será de 0,33 e no caso limite será algo maior (0,5 para distribuição retangular), normalmente em torno de 0,40.

Conforme se observa, não há diferença extremamente sensível entre as fases elástica e plástica e estaremos do lado seguro admitindo um valor constante igual a 0,4, pôsto que o valor de  $E_c \cdot J$ , entre as trincas, é algo maior e, na realidade, as deflexões serão pouco menores.

O valor  $E_c = 500\sigma_{cáb}$ , tomado em função de uma deformação de 0,2%, na ruptura, parece-nos satisfatòriamente razoável.

Consideremos a seguir a formação de uma rótula plástica num apóio (fig. 52).

A rotação  $\theta$  da rótula será dada por:

$$\frac{l_p + \frac{\epsilon_p (1 - k_x) l_p}{k_x}}{h + r} = \frac{l_p - \epsilon_p \cdot l_p}{r},$$

ou ainda  $\theta = \frac{\epsilon_p \cdot l_p}{k_x \cdot h}$  (1), na forma divulgada por Baker.

O valor de  $\epsilon_p$  refere-se à deformação plástica do concreto e é, naturalmente, a deformação que ocorre desde o instante em que a fibra superior atinge o limite da elasticidade até a ocasião da ruptura.

A expressão geral para a rotação de uma rótula, na fase plástica, foi deduzida por Yü apresentando-se com o seguinte aspecto:

$$\theta = \int_0^{l_p} \frac{M \cdot dx}{(EJ)_p} - \int_0^{l_p} \frac{M \cdot dx}{(EJ)_e},$$

M sendo o momento no trecho plastificado  $l_p$ . Admitindo-se constante êste momento e desprezando-se a deformação (muito menor) na gama elástica, então:



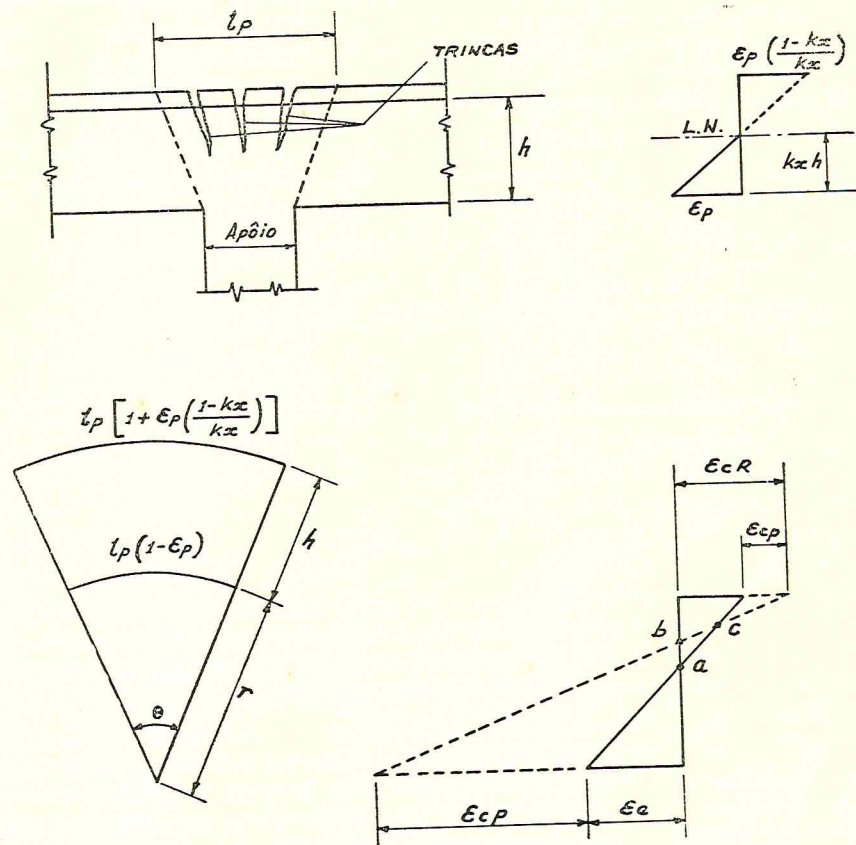


FIG. 52

$$\theta = M \int_0^{l_p} \frac{dx}{(EJ)_p}$$

cuja solução levar-nos-á a expressão de Baker(1).

O comprimento de plastificação é função do diagrama momento - deformação da secção e da forma do diagrama de momentos devido ao carregamento externo (fig. 53).

A capacidade de rotação de uma rótula sendo função linear de  $\epsilon_p$ , é óbvio que o aumento deste valor permitirá atingir um maior ângulo de rotação.

Baker e Chan (40), demonstraram que, com estribagem adequada, o valor de 0,1% de  $\epsilon_p$ , anteriormente preconizado, pode atingir até 1,0%, indicando Baker um comprimento de plastificação  $l_p = h$ , isto é igual à altura útil da viga.

Os métodos de cálculo pela aplicação das rótulas plásticas, de um modo geral, consistem na redistribuição de momentos positivos e negativos, respeitadas as condições de equilíbrio e limitação das rotações a valores admissíveis.

Fugindo à finalidade do presente trabalho uma apreciação minuciosa dos métodos atualmente em uso, e concernentes à aplicação das rótulas plásticas às estruturas de concreto armado ou protendido, limitar-nos-emos a, de maneira sumária, indicar as restrições, conveniências e inconveniências, naquilo que diz respeito às estruturas de concreto protendido.

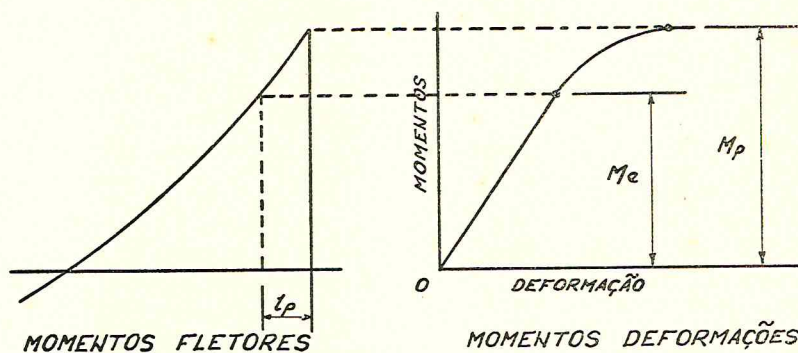


FIG. 53

Sendo óbvio que, para o valor da rotação, colaboram os elementos do carregamento exterior e aqueles devidos à protensão é de capital importância para o cálculo de  $\theta$  (necessário à formação da rótula determinante), a inclusão dos valores de rotação inversa, devidos à protensão.

Aumentando, a protensão, a duração do carregamento na fase elástica e, sendo a deformação total igual à soma dos valores relativos à fase elástica e plástica e, ainda mais, sendo as deformações na fase elástica menores do que as da plástica, conclui-se que a rotação exigida para que os momentos limites sejam atingidos será menor nas estruturas protendidas.

A expressão genérica da rótula determinante, ou seja da de ordem  $(n + 1)$  será dada por:

$$\theta_{n+1} = \delta_{o,n+1} + X_n \delta_{n+1} + X_{n+1} \delta_{n+1, n+1} + X_{n+2} \delta_{n+1, n+2},$$

onde,  $X_n, X_{n+1}, X_{n+2}$  são os momentos que se desenvolvem nas rótulas vizinhas e na rótula em estudo, a saber, os momentos limites das rótulas; e  $\delta_{o,n+1}$  a deformação devida ao carregamento exterior, e na qual deve ser incluído o termo relativo à protensão: de um modo geral,

$$\delta_{o,n+1} = \int \frac{M_o \cdot M k \cdot ds}{E \cdot J}$$

Nas porções fissuradas é evidente que, uma vez considerada a inclusão do valor da protensão na obtenção de  $k_x$ , o termo complementar será assumido igual a zero. Assim, a integral deve ser estendida a toda a peça e considerados os efeitos correspondentes nos trechos fissurados e não fissurados. De acordo com Baker, tal influência pode ser desprezada, o que nos situa do lado seguro. Ressaltamos o fato que, conforme a natureza ou tipo de carregamento, a extensão não fissurada da peça pode ser determinante quando então, mais do que nunca, a importância da protensão é fundamental.

### 3.2.3. Conclusões

Face ao exposto, concluímos ser não só possível como recomendável, a verificação das estruturas em concreto protendido baseada nos estágios limites de

carregamento. Não obstante, os estágios intermediários devem ser verificados, e as condições determinantes, em cada fase, respeitadas. Tais acertivas, aparentemente contraditórias são, na verdade, complementares. Com efeito, se considerarmos que é de fundamental importância conhecer-se o comportamento da peça nos estágios de transferência e de ruptura, vemo-nos na contingência de analisar, por um lado as condições elásticas, e de outro, as inelásticas da estrutura.

O cálculo elástico, fora de dúvida, torna-se necessário para — sob condições de serviço — limitar deformações, condições de fissuramento (até certo ponto imprescindíveis para garantir a integridade da armadura), etc.

O cálculo plástico, por seu turno, é indispensável porque, conforme foi visto, os valores de tensões não crescem proporcionalmente com o aumento de carga e, mais ainda, mesmo no regime elástico o problema será de flexão composta com carga excêntrica, onde também não se verifica o crescimento proporcional das tensões em relação ao valor global do esforço exterior aplicado.

Em realidade, verificamos que as estruturas hiperestáticas somente alcançam à ruína, quando um número suficiente de rótulas plásticas é atingido. Ficou patente, outrossim, que um trecho da estrutura — no estágio imediatamente anterior à ruptura — transforma-se em isostático. Nestas condições, o cálculo conduzido por meio de envoltórias — decorrentes de hipóteses diversas de carregamento — não se justifica, dada a impossibilidade de ocorrência simultânea.

Assim, a vantagem que resulta do aumento de vínculos será integralmente aproveitada quando se utilizam estruturas hiperestáticas. Daí concluirmos pela orientação que estende o cálculo de verificação à estrutura como um todo. Evidentemente, para as estáticamente determinadas, a ruptura da secção conduzindo ao mecanismo e ruína, a simples verificação da secção é suficiente.

Outro aspecto que acreditamos de suma importância é a necessidade de intensificar as pesquisas ao estudo das estruturas pretendidas em regime plástico — seja no campo analítico, seja no experimental — as quais, entendemos, devam ser orientados como segue:

- a) **Pesquisas analíticas** — Nos métodos elásticos, a constante “*princípio da superposição dos efeitos*”, tem permitido um estudo claro e bem definido dos problemas. Os métodos plásticos, não obstante ofereçam soluções muito mais simples, ainda se ressentem da aplicação de um instrumento equivalente. Quer nos parecer que, uma orientação segura, seria a de conduzir o cálculo mediante o estabelecimento de condições críticas para uma série de secções determinantes, em grupos, de modo que o carregamento possível verificasse a formação de mecanismo para posições diversas de carga. Em resumo, e por assim dizer, *uma envoltória das condições de plastificação*.

O estudo deve ser desenvolvido na ordem crescente de complexidade estrutural. Assim, por exemplo, mantida a condição previamente estabelecida, qual seja, de que uma estrutura hiperestática transformar-se-á num certo grupo de elementos isostáticos, interligados por rótulas plásticas, é bem de ver que, para as estruturas onde sejam secundárias as condições de deslocabilidade, o sistema básico a ser considerado seria a viga engastada. Já para as estruturas deslocáveis, pórticos (simples ou múltiplos) isostáticos, seriam o ponto de partida.

- b) **Pesquisas experimentais** — Não obstante o avultado numero de ensaios de flexão com peças isoladas de concreto pretendido, prática-

mente nada tem sido feito no sentido de averiguar o real comportamento estrutural de conjunto. Outro fator de precariedade a ressaltar — e que pela sua generalização já atinge as proporções de vício consagrado — é o fato dos ensaios (pelo menos na sua maioria) serem conduzidos com base na falsa hipótese de que o comportamento plástico sempre sucede a uma fase elástica. Na realidade, deformações plásticas ocorrem nas estruturas de concreto protendido durante toda sua existência, inclusive em sua vida elástica. Assim é que, no atual estágio dos conhecimentos, já não se admite o estudo de fenômenos como a retração e a deformação lenta, por exemplo, sem a devida consideração da deformabilidade plástica. A concepção que marca os trabalhos de L'Hermitte, <sup>(42)</sup>Gvodzev<sup>(43)</sup> e outros<sup>(\*)</sup>, neste sentido, permite-nos antecipar que os estudos futuros serão orientados com a presença da consideração da deformabilidade plástica, perfeitamente definida desde o instante em que se inicia o carregamento. Em outros termos, deverão ser levados à devida conta os efeitos elasto-viscosos do concreto, inclusive no seu aspecto favorável.

---

(\*) Entre nós, menção especial deve ser feita à excelente monografia, a respeito, de Gravina <sup>(44)</sup>.

## BIBLIOGRAFIA

- (1) Galileo Galilei, "*Discorsi e Dimostrazioni matematiche*", Leiden, 1638 — *Apud. Love, A. E. H., — "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity"* — Cambridge U. Press — 1952.
- (2) Euler, Leonard — "*Sur la force des colonnes*" — Academie des Sciences de Berlin. 1757 pg. 252.
- (3) Van den Broek, J. A., "*Theory of Limit Design*" John Wiley and — Sons, New York 1948
- (4) Kazinczy, G. V., "*Tests with fixed — ended Beams*". *Betonszemle*, Budapest, Vol. 2 (1914) — *Apud "The Steel Skekton"*, J. F. Baker, M. R. Horne e J. Heyman — Cambridge University Press — 1956.
- (5) Maier-Leibnitz, H., — "*Tests Results, their Interpretation and — Application*" — Preliminary Publication — A. I. P. C., 2.º Congresso — Berlin 1936.
- (6) Baker, J. F., Roderick, J. W. — "*An Experimental Investigation of the Strength of Seven Portal Frames*" (First Interim Report, Research Committee of the Institute of Welding). *Trans. Inst. Weld.* Vol. I, n.º 4 (1938).
- (7) Greenberg, H. J., Praeger, W., — "*Limit Design of Beams and Frames*" — Proceedings of the American Society of Civil Engineers, v. 77, n.º 59, Feb. pgs. 1-12 — 1951.
- (8) Neal, B. G., Symonds, P. S. — "*The Calculation of Collapse Loads for Framed Structures*," *Journal of the Institution of Civil Engineers (Lond.)* v. 35, n.º Nov. pgs. 2-40 — 1950.
- (9) Horne, M. R., "*A Moment Distribution Method for the Analysis and — Design of Structures by the Plastic Theory*", *Proceedings of the Institution of Civil Engineers (London)*, v. 3, Part 3, N.º 1, April — pp. 51-76 — 1954.  
Horne, M. R., "*Fundamental Propositions in the Plastic Theory of Structures*", *Journal of the Institution of Civil Engineers (London)*, V. 34, N.º 6, April, pp. 174-177 — 1950.
- (10) Sawyer, H. A., "*Elasti-plastic Design of Single-Span Beams and Frames*", *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, V. 81, Separate N.º 851, Dec., pp. 851-1 to 851-29 — 1955.
- (11) Stevens, L. K., "*Carrying Capacity of Mild Steel Arches*", *Proceedings of the Institution of Civil Engineers (London)*, V. 6, Mar. pp. 493-514 — 1957.
- (12) Emperger, Fritz v. — "*Handbuch für Eisenbetonbau*" — Berlin, 1930.
- (13) Kazinczy, G. V., "*Die Plastizität des Eisenbetons*" *Beton u Eisen.* (Germany) V. 32 pp. 74-80 — 1933.
- (14) Baker, A. L. L., "*A Plastic Theory of Design for Ordinary Reinforced and Prestressed Concrete, Including Moment Redistribution in Concrete Members*", *Magazine of Concrete Research (London)*, V. 1, N.º 2. June, pp. 57-66 — 1949.
- (15) Baker, A. L. L., "*Recent Research in Reinforced Concrete and Its Application to Design*", *Journal of the Institution of Civil — Engineers (London)*, V. 35, b.º 4, Feb., pp. 262-298 — 1951.
- (16) Baker, A. L. L., "*Further Research in Reinforced Concrete, and Its Application to Ultimate Load Design*", *Proceedings of the Institution of Civil Engineers (London)*, V. 2, Part 3, N.º 2, Aug., pp. 269-310 — 1953.
- (17) Baker, A. L. L., "*Recent Research at Imperial College*" — *The Reinforced Concrete Review (London)*, V. 3, pp. 313-353 — 1954.
- (18) Baker, A. L. L., "*High Building Frames and Foundations*", *Proceedings of the Institution of Civil Engineers (London)*, V. 4, Part 3, n.º 2, August, pp. 228-245 — 1955.
- (19) Baker, A. L. L., "*Ultimate Load Design of Reinforced and Prestressed Concrete Frames*", *Symposium on the Strength of Concrete structures, Cement and Concrete Association (London)* — 1956.

- (20) Baker, A. L. L., "The Ultimate Load Theory Applied to the Design of Reinforced and Prestressed Concrete Frames". Concrete Publication Ltd. (London), 87 pp. — 1956.
- (21) Neal, B. G., "The Plastic Methods of Structural Analysis", Chapman & Hall Ltd, London, 1956.
- (22) Beedle, L. S., "Plastic Design of Steel Frames", John Wiley & Sons, Publishers, 1958.
- (23) Guyon, Y., "Béton Précontraint" (Étude Théorique et Expérimentale) Eyrolles, Paris, 1951.
- (24) Chambaud, R., "Étude expérimentale de la flexion dans les pièces en béton armé. Théorie élasto-plastique et méthode de calcul a coefficient de sécurité constant. — Ann. de I. B. T. P. — Janeiro/Fevereiro 1949.
- (25) Robinson, J. R., "Cours de Béton Précontraint", Dunod, Paris, 1954.
- (26) Rös, M., "Vorgespannter Beton". Bericht n.º 155. E. M. P. A. Zurich, 1946.
- (27) Mörsch, E., "Die Ermittlung des Bruchmomentes von Spannbetontragern", Bautechnik, April 1949, Vol. 26, n.º 4, pp. 98-99.  
Mörsch, E., "Die Ermittlung des Bruchmomentes von Spannbetonbalken", Beton und Stahlbetonbau, July 1950, Vol. 45, n.º 7 pp. 149-157.
- (28) King, J. W. H., "The Design of Prestressed Concrete Beams for Fundamental principles". Concrete and Constructional Engineering, September 1950, Vol. 45, n.º 9, pp. 307-319.  
King, J. W. H., "Fundamental approach to Prestressed Concrete Design". The Structural Engineer, January 1951, Vol. 29, n.º 1, pp. 11-20.
- (29) Rüsç, H., "Bruchlast und Bruchsicherheitsnachweis bei Biegungsbean — spruchung von Stahlbeton unter besonderer Berücksichtigung der Vorspannung". Beton und Stahlbetonbau, September 1950, Vol. 45, n.º 9, pp. 215-220.
- (30) Langendonck, T. Van., "Cálculo de Concreto Armado", Associação Brasileira de Cimento Portland, Vol. II, São Paulo 1950.
- (31) Ramaswamy, G. S., and Narayana, S. K., "The Ultimate Flexural Strength of Post-Tensioned Grouted Rectangular Beams", Papers, F. I. P., Third Congress, Berlin, 1958.
- (32) Weber, A., "Vorgespannter Eisenbeton". Schweiz. Baumeister Zeitung 1944-1945.
- (33) Colonnetti, G., "Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese. Il problema dei margini di sicurezza". Pont. Ac. Scient, Acta, vol. VI, n.º 36.
- (34) Billig, K., "The Ultimate Load and Factor of safety of Prestressed Concrete". Civil Engineering and Public Works Review, October, November, December 1940, Vol. 44, nos. 520, 521, and 522, pp. 579-581, 651-654, 721-723, January 1050, Vol. 45, n.º 523, pp. 39-40.
- (35) Gvozdev, A. A., Dmitriev, S. A., Kalatourov, B. A. et Mikhailov V. V., "Calcul des Constructions en béton Précontraint en U. R. S. S. d'après la méthode des états Limites". Papers, F. I. P., Third Congress, Berlin, 1958.
- (36) Hognestad, E., "Ultimate Strength of Reinforced Concrete in American Design Practice". Symposium on the Strength of Concrete Structures, London 1956. Session E, Paper n.º 1, pp. 18.  
Hognestad, E., "A Study of Combined Bending and axial Load in Reinforced Concrete members. University of Illinois Engineering Experiment Station Bulletin n.º 399, 1951, pp. 128.
- (37) Moenaert, P., "Étude expérimentale de la rupture d'une pièce longue en béton armé sollicitée par flexion plane composée non déviée". Bruxelles, Imprimerie G. I. C., 1953.
- (38) Rüsç, H., "Bruchlast und Bruchsicherheitsnachweis bei Biegungsbeanspruchung von Stahlbeton unter Besonderer Berücksichtigung der Vorspannung". Beton und Stahlbetonbau. Jahrgang, 45, Heft 9. September 1950, ss. 215-220.  
Rüsç, H., "Versuche zur Festigkeit der Biegedruckzone". Berlin, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, 1955. Heft 120. ss 94.  
Rüsç, H., "Einfluss von Einzellasten auf die Biegedruckzone", Schlussbericht zum Funften Kongress der Internationale Vereinigung für Bruckenbau und Hochbau, Lisboa, 1956, ss. 595-597.
- (39) Rüsç, H., "Entwicklung der Entwurfsverfahren", Papers, F. I. P. Third Congress, Berlin, 1958.

- (40) Chan, W. W. L., "The Ultimate Strength and Deformation of Plastic Hinges in Reinforced Concrete Frameworks", Magazine of Concrete Research (London), V. 7, n.º 21, Nov., pp. 121-132, 1955.
- (41) Johansen, K. W., "Nogle Pladeformler", Bygningsstatistiske Meddelesler, Copenhagen, V. 4, 1932.
- (42) L'Hermite, R., "Que savons-nous de la déformation plastique et du fluage du béton?", Béton armé (46) Annales, De L'Institut — Technique du Batiment et des Travaux Publics, Septembre 1957.
- (43) Gvozdev, A. A., "Raschet nesustchei sposobnosti Konstruktsii".
- (44) Gravina, P. B. J., "A Teoria Elasto-Viscosa das Estruturas de Concreto" Armado e Pro-tendido", São Paulo, 1956.
- (45) Freyssinet, E., "Une révolution dans les techniques du béton" — Paris, 1929.
- (46) Chamecki, S., "Cálculo no Regime de Ruptura das Lajes de Concreto armadas em Cruz", Guaíra, 1948.
- (47) Guzman, A. M., "Cálculo Plástico de Placas Planas", Symposium sobre Aplicaciones de la Plasticidad en el Cálculo de las Estructuras de Hormigon Armado, El Ateneo, 1955.
- (48) Glanville, W. H. and Thomas, F. G., "The Redistribution of Moments in Reinforced Concrete Beams and Frames", Paper n.º 5061, Journal of the Institution of Civil Engineers (London), V. 3, pp. 291-329, 1933.